172. *Une démonstration géométrique de la loi de réciprocité quadratique*

Par Pierre KAPLAN
Maison Franco-Japonaise, Kanda, Tokyo

(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M. J. A., Nov. 12, 1969)

Dans l'article (1) Eisenstein démontre la loi de réciprocité quadratique en utilisant les fonctions circulaires, il se sert en particulier du fait que $\frac{\sin nx}{\sin x}$ est un polynôme de degré $n-1$ en $\sin x$. Mais à la fin de cet article il remarque que l'on pourrait faire cette démonstration de manière purement arithmétique, sans utiliser de propriété des fonctions circulaires.

La but de cette note est d'indiquer comment cela peut se faire.

Cette démonstration est basée sur un lemme de Gauss bien connu: Soit p un nombre premier impair, a un entier premier à p, r le nombre des entiers $a, 2a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$ congru modulo p à un entier de l'intervalle $\left(\frac{p+1}{2}, p-1\right)$. Alors $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(-1\right)^r$.

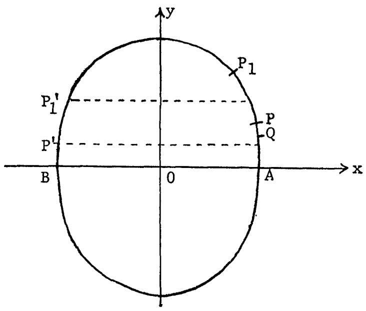

Fig. 1

Dans la suite p et q désignent deux nombres impairs premiers entre eux. Considérons dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires une coube (C), rectifiable, symétrique par rapport aux axes, définie dans le premier quadrant par une fonction $x(y)$ décroissante. Soient A et B les points d'intersection de (C) avec O_x. Désignons par P (respectivement Q) les points de division de (C) en p (respectivement q) parties de longueur égale: A étant l'un d'eux, pris pour origine des