

200. Noyaux de convolution en partie finie opérant sur les fonctions höldériennes

Par Yoshifusa ITO

Département de Physiologie, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

1. Introduction. On emploiera les notations dans [1] et [2].

On définira, d'abord, l'opérateur de convolution associé en partie finie à un noyau k tel que $r^{n+\eta} |k(r\theta)| < M$ dans un voisinage de l'origine, et notera $\tilde{k}f$ la convolution opérant sur une fonction f . Cette opérateur applique $C_k^{0,\lambda}(R^n)$ dans $C^0(R^n)$ si $\lambda - \eta > 0$.

Ensuite, on définira une classe $M^{0,\eta,\mu}$ des noyaux, qui contient une classe $N^{0,\eta,\mu}$ définie dans [2]. L'opérateur de convolution associé en partie finie à un noyau de classe $M^{0,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p,\lambda-\eta}(R^n)$ si $0 < \lambda - \eta < \mu \leq 1$. Si $k \in N^{0,\eta,\mu}$ et $f \in C_K^{p,\lambda}(R^n)$ ($\lambda - \eta > 0$), $\tilde{k}f = \tilde{k}f - q(k)f$, où $q(k)$ est une constante dépendante du noyau k .

Finalement, on définira une classe $M^{m,\eta,\mu}$ ($m \geq 1$ entier) de noyaux. Un noyau h de classe $M^{m,\eta,\mu}$ est, par définition, un noyau dont les dérivées partielles d'ordre p ($1 \leq p \leq m$) sont dans $M^{0,\eta,\mu}$. L'opérateur de convolution associé à un noyau de classe $M^{m,\eta,\mu}$ applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\eta}(R^n)$ si $0 < \lambda - \eta < \mu \leq 1$.

Comme application, l'opérateur de convolution associé au noyau du potentiel d'ordre α ($m-1 < \alpha \leq m$, $m \geq 1$ entier) applique continûment $C_K^{p,\lambda}(R^n)$ dans $C^{p+m,\lambda-\alpha+m}(R^n)$.

2. Noyau de classe $M^{0,\eta}$. Un noyau k de classe $M^{0,\eta}$ ($0 \leq \eta < 1$) est, par définition, une fonction mesurable finie dans $R^n - \{0\}$ et satisfaisante aux conditions suivantes a) et b).

a) Il existe deux nombres positifs R et M tels que

$$\sup_{0 < |z| \leq R} |z|^{n+\eta} |k(z)| < M.$$

b) $k(z)$ est borné dans $\{|z| > R\}$.

On définit, pour ε ($0 < \varepsilon < R$),

$$\tilde{k}_{R,\varepsilon} f(x) = \int_{\varepsilon < |z| \leq R} k(z)[f(x-z) - f(x)] dz + \int_{R > |z|} k(z) f(x-z) dz.$$

On trouve une proposition suivante.

Proposition. Soient $k \in M^{0,\eta}$ et $0 \leq \eta < \lambda \leq 1$. Alors, quelle que soit $f \in C_K^{0,\lambda}(R^n)$, $\tilde{k}_{R,\varepsilon} f(x)$ converge uniformément en $x \in R^n$ lorsque ε tend vers 0. D'où la limite est une fonction continue et bornée dans R^n .

À un noyau de classe $M^{0,\eta}$, on associe une application linéaire \tilde{k}_R de $C_k^{0,\lambda}(R^n)$ ($\lambda - \eta > 0$) dans $C^0(R^n)$, en posant,