193. *Sur les développements orthogonaux dans* L(*p*, *q*). II

Par D. Lass FERNANDEZ
Instituto de Matemática, Universidade de Campinas,
Campinas, São Paulo, Brasil

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

Dans cette Note, nous donnerons la démonstration du théorème A. Démontrons tout d'abord un proposition que nous aurons à utiliser par la suite.

La proposition 2.9. généralise le théorème 646 de [3], et pour le démontrer dans le cadre des espaces $L(p, q)$ il nous faut d'utiliser le lemme suivant dû à Lorentz [4].

2.8. Lemme. Si $p<q$, alors on a $L(q, \infty)\subset L(p, 1)$ et $\|f\|_{p1} \leq C\|f\|_{q\infty}$

2.9. Proposition. *Pour que* $\sum c_n \emptyset_n \in L(p, q)$, $1\leq p\leq \infty$ et $1\leq q \leq \infty$, *il faut et il suffit que la série*

2.9(1) $$\sum c_n \bar{\hat{g}}_n$$

soit somable pour toute suite $(\hat{g}_n)$, *des coeficients de Fourier des fonctions* $g \in L(p', q')$.

Démonstration. Soit $S(f)=\sum c_n\emptyset_n \in L(p, q)$ et $g\in L(p', q')$. Alors si p, $q\neq\infty$ ou $p=1$ et $q=\infty$, on a

$$\rho_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_j c_j\bar{\hat{g}}_j=\int_a^b \sigma_n(f\,;\,t)\overline{g(t)}dt,$$

$$|\rho_i-\rho_j|=\int_a^b |\sigma_i-\sigma_j|\,|g(t)|\,dt\leq \|\sigma_i-\sigma_j\|_{pq}\|g\|_{p'q'}.$$

Donc $|\rho_i|$ converge puisque $\|\sigma_i-\sigma_j\|_{pq}\to 0$. Si $f\in L(p, \infty)$, $1<p\leq\infty$, on utilise l'identité

$$\rho_i=\int_a^b \sigma_i(f\,;\,t)\overline{g(t)}dt=\int_a^b \overline{\sigma_i(g\,;\,t)}f(t)dt$$

et le résultat est valable pour $g\in L(p', 1)$. Supposons maintenant que

$$\rho_i=\sum a_{ik} \sum c_j\bar{\hat{g}}_j=\int_a^b \sigma_n(t)\overline{g(t)}dt$$

soit convergente, c'est à dire que 2.9(1) soit somable pour toute $g\in L(p', q')$. Donc, par le théorème de Banach-Steinhaus, on a

2.9(2) $$\|\sigma_n\|_{pq}\leq C.$$

Alors, (i) si $1\leq p<\infty$ et $1\leq q<\infty$ la conclusion s'ensuit par 2.4; (ii) si $p=1$ et $q=\infty$ on a $L(1, \infty)=L^1$ et ce cas est compris dans le cas précédent; (iii) si $1<p<\infty$ et $q=\infty$ on a $L(p, \infty)\subset L^{p-\varepsilon}$, $(\varepsilon>0)$, donc $\sigma_n\to f$ (dans $L^{p-\varepsilon}$); alors, on a $\sigma_n\to f$, p.p., et $\sigma_n^*\to f^*$ (remarquons que l'espace est de mesure finie) et par 2.9(2) on voit que $\sigma_n^*(t)\leq Ct^{-1/p}$ donc