191. *Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

§1. Soient n un entier $\geqq 2$ et Ω la boule unitée de $\boldsymbol{R}^n$:

$$\Omega=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n\,;\,|x|\equiv\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}<1\right\}. \tag{1}$$

Traitons, dans Ω, un opérateur différentiel L elliptique dégénéré au bord

$$Lu(x)=-\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(1-|x|^2)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}+(n-1)u(x). \tag{2}$$

L est auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathcal{D}[L]=\{u(x)\in H^1(\Omega)\,;\,(1-|x|^2)u(x)\in H^2(\Omega)\}$. L est un cas particulier des opérateurs traités par Baouendi-Goulaouic [2]. Son spectre se consiste des valeurs propres positives dont chacune est de multiplicité finie. L'invariance de L par rapport aux rotations nous facilite de calculer toutes ces valeurs propres et les fonctions propres correspondantes: Définissons une suite double $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ et une autre suite $\{\mu(k)\}_{k=0}^\infty$ en posant

$$\lambda_{k,l}=(2l+1)(2l+2k+n-1),\quad \text{pour}\quad k,l=0,1,2,\cdots; \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\mu(0)=1 \quad \text{et} \quad \mu(k)=2 & \text{pour} & k\geqq 1, & \text{si}\quad n=2;\\ \mu(k)=(2k+n-2)\dfrac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} & \text{pour} & k\geqq 0, & \text{si}\quad n\geqq 3.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Proposition 1. (α) *$\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ est la totalité des valeurs propres de L dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de la multiplicité $\mu(k)$;*

(β) *Pour (k,l) fixe, une base des fonctions propres correspondant à $\lambda_{k,l}$ est formée par les fonctions de la forme*

$$u_{k,l,\nu}(x)=H_{k,\nu}(x)P_{k,l}(|x|^2), \tag{5}$$

où ν varie de 1 à $\mu(k)$, $\{H_{k,\nu}(x)\}_{\nu=1}^{\mu(k)}$ est une base des polynômes harmoniques homogènes d'ordre k, et les $P_{k,l}(t)$ sont des polynômes de t d'ordre l tels que $P_{k,l}(0)\neq 0$.

Preuve. Nous savons l'hypoellipticité de L (voir [2]). Résolvons l'équation $Lu=\lambda u$ par séparation des variables radiale et sphériques. Quel que soit $\lambda\in \boldsymbol{C}$, on obtient une solution formelle de $Lu=\lambda u$. Mais la demande $u\in\mathcal{D}[L]$ implique que λ est l'une des $\lambda_{k,l}$ ci-dessus et que u est une combinaison linéaire des fonctions de la forme (5). C.Q.F.D.

Soit maintenant $T>0$ et désignons par $N(T)$ la somme des $\mu(k)$ telles que $\lambda_{k,l}\leqq T$. Alors, nous avons facilement le théorème suivant:

Theoreme 1. *Lorsque T tend vers $+\infty$, $N(T)$ se comporte asymptotiquement*