83. *Remarque sur les espaces fonctionnels de type L^2*

Par Masayuki ITO
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 13, 1970)

1. Soit X un espace localement conpact à base dénombrable, et soit ξ une mesure de Radon positive sur X. Rappelons qu'un espace fonctionnel $\mathfrak{X}$ (relatif à X et à ξ) est un espace hilbertien dont tout l'élément est une fonction localement ξ-sommable dans X, à valeurs réelles, et qui satisfait à la condition suivante:

(a) Pour un compact K de X, il existe une constante $A(K)>0$ telle que l'on ait, quelle que soit u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u|\,d\xi \leqq A(K)\|u\| \tag{1}$$

(voir [1] et [2]). On désigne respectivement par $\|\cdot\|$ et par $(\cdot,\cdot)$ la norme de $\mathfrak{X}$ et son produit scalaire.

Soit M la totalité de fonctions ξ-mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact, et M^+ est son sous-ensemble des fonctions $\geqq 0$. Il résulte de la condition (a) qu'à une fonction f de M, on peut associer une fonction u_f de $\mathfrak{X}$, et une seule telle que l'on ait, quelle que soit v de $\mathfrak{X}$,

$$(u_f, v) = \int v f\,d\xi, \tag{2}$$

et on appelle u_f le potentiel de f dans $\mathfrak{X}$. On dit que $\mathfrak{X}$ est à noyau positif si, quelle que soit f de M^+, $u_f \geqq 0$.

On connaît que la condition suivante (a′) est très pratique pour la théorie du potentiel dans $\mathfrak{X}$ (voir [2]).

(a′) A un compact K de X, on peut associer une constante $A'(K)>0$ telle que l'on ait, quelle que soit u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u|^2\,d\xi \leqq A(K)\|u\|^2. \tag{3}$$

On dit que $\mathfrak{X}$ est de type L^2 si $\mathfrak{X}$ satisfait à (a′), et on se propose de fournir une caractérisation pour que $\mathfrak{X}$ soit de type L^2.

2. On commencera avec la définition de noyau (relatif à X et à ξ) d'après [3]. Soit E la σ-algèbre constituée par tous les ensembles ξ-mesurables de X. Une fonction $N \geqq 0$ d'ensemble sur $E\times E$ s'appelle un noyau si, quel que soit e_0 un ensemble relativement compact de E, les applications: $e \to N(e_0, e)$, $e \to N(e, e_0)$ de E sont complètement additives et absolument continues par rapport à ξ. N est symétrique si, quels que soient e_1, e_2 de $E, N(e_1, e_2) = N(e_2, e_1)$. Pour une founction