63. *Sur la compacité des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Hilbert*

Par Yoshio KONISHI
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., May 12, 1972)

1. Résultat. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel.[1] Soit $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un *semi-groupe* (continu) *de contractions* (non linéaires) sur un convexe fermé $C\subset\mathcal{H}$, c'est-à-dire, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est une famille T_t d'applications de $D(T_t)=C$[2] dans C dépendant du paramètre $t\geq 0$, qui satisfait aux quatre propriétés suivantes:

$$T_0x=x, \qquad x\in C,$$
$$T_tT_s=T_{t+s}, \qquad t \text{ et } s\geq 0,$$
$$\lim_{t\downarrow 0} T_tx=x \text{ dans } \mathcal{H}, \qquad x\in C,$$
$$\|T_tx-T_ty\|\leq\|x-y\|, \quad x,y\in C, \quad t\geq 0.$$

Grâce au *théorème de Hille-Yosida non linéaire* (voir, en particulier, Kōmura [5], Kato [4] et Crandall et Pazy [3]) il existe un opérateur A (multivoque) 《*maximal monotone*》 au sens de Minty et Browder,[3] unique, tel que $\overline{D(A)}=C$ et $\{T_t\}_{t\geq 0}$ coïncide avec le semi-groupe de contractions engendré par $-A$:

$$T_tx=\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}x \text{ dans } \mathcal{H} \text{ pour } x\in C \text{ et } t\geq 0.$$

Définition. On dit que le semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est *compact* si l'opérateur T_t est compact[4] pour tout $t>0$.

Le but de cette note est de donner une caractérisation de la compacité du semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Notre théorème constitue une version non linéaire du théorème 3.3 de Pazy [6].

Théorème. *On emploie les notations ci-dessus. Les propriétés* (a) *et* (b) *sont équivalentes*:

(a) *Le semi-groupe* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *est compact*;

(b) (b_1) *La résolvante* $(I+A)^{-1}$ *est compacte*
et
(b_2) *pour tout sous-ensemble borné B de C, la famille des fonctions*: $]0,\infty[\ni t\mapsto T_tx$, *où x parcourt B, est équicontinue.*

---

1) La norme est notée $\|\cdot\|$.

2) On désigne par $D(T)$ le domaine de définition d'opérateur T.

3) Par conséquent, pour tout $\lambda>0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur $\mathcal{H}$.

4) Un opérateur $T: D(T)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ est dit *compact* si, pour toute partie B bornée de $D(T)$, l'image $T\cdot B=\{Tx; x\in B\}$ est relativement compacte.