65. *Compacité des résolvantes des opérateurs maximaux cycliquement monotones*

Par Yoshio KONISHI
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., May 22, 1973)

Soit A un opérateur «maximal cycliquement monotone»[1] dans un espace de Hilbert H sur R, tel que $0 \in A0$. En utilisant le «*théorème de Kōmura*», i.e., le *théorème de Hille-Yosida non linéaire,*[2] on peut définir l'opérateur $A_{1/2}$ de A [3]; voir Barbu [2], [3] et Brézis [6]. $A_{1/2}$ est un opérateur maximal cycliquement monotone tel que $0 \in A_{1/2}0$ (voir le théorème 4, ii) de Barbu [3]).

L'objet de cette note est de prouver le

Théorème. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $(I+A)^{-1}$ *est compact.*[4]

(ii) $(I+A_{1/2})^{-1}$ *est compact.*

Remarques. (a) Notre résultat pourrait être considéré comme une version non linéaire de la propriété 4.5 de Balakrishnan [1].

(b) Il serait intéressant d'établir le théorème ci-dessus pour A «maximal monotone» au sens de Minty et Browder, tel que $0 \in A0$. (Noter qu'on a l'implication: (ii)⇒(i) pour cet A.)

Démonstration. (ii)⇒(i): On sait que $D(A) \subset D(A_{1/2})$ et l'on obtient

$$(I+A)^{-1}=(I+A_{1/2})^{-1}(I+A_{1/2}^{\circ})(I+A)^{-1}.^{5)}$$

D'autre part, on a, pour tout $x \in H$,

$$\|(I+A_{1/2}^{\circ})(I+A)^{-1}x\| \leqq \|x\|+\|A_{1/2}^{\circ}(I+A)^{-1}x\|$$

et l'on sait que

$$\|A_{1/2}^{\circ}x\| \leqq 2\|A^{\circ}x\|^{1/2}\|x\|^{1/2} \qquad \text{pour tout } x \in D(A)$$

(voir l'exemple 1 de Brézis [6]). D'où

$$\begin{aligned}&\|(I+A_{1/2}^{\circ})(I+A)^{-1}x\|, \qquad x \in H,\\ &\leqq \|x\|+2\|A^{\circ}(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\|(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\\ &\leqq \|x\|+2\|x-(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\|x\|^{1/2} \leqq (1+2\sqrt{2})\|x\|.\end{aligned}$$

Par conséquent l'opérateur $(I+A)^{-1}$ est compact.

(i)⇒(ii): $1^{\text{ère}}$ *étape.* Nous montrons d'abord la «compacité du

---

1) Voir Rockafellar [8].

2) Voir, e.g., le chapitre IV, 1 de Brézis [4].

3) Dans le cas particulier où $A=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, on a $A_{1/2}=A^{1/2}\equiv\int_0^\infty \sqrt{\lambda}dE_\lambda$.

4) Un opérateur $T: D(T) \subset H \to H$ est dit *compact* si, pour toute partie B bornée de $D(T)$, l'image $T \cdot B$ est relativement compacte.

5) Etant donné un opérateur maximal monotone $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\circ}x, x \in D(\mathcal{A})$, désigne l'élément de norme minimale du convexe fermé $\mathcal{A}x$.