93. *Equations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes. I*

Théorème d'existence

Par Kazuhiko AOMOTO
Collège d'Education Générale, Université de Tokyo

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Sept. 12, 1974)

Dans cette note on va enoncer un théorème d'existence des équations linéaires aux différences partielles et proposer le problème de connexion y associé.

Soit $E=(e_i,\ 1\leqq i\leqq n)$ une base du réseau entier $\boldsymbol{Z}^n$ dans $\boldsymbol{C}^n$. Soient $A_i(x)$ $(1\leqq i\leqq n)$ fonctions rationnelles de x dans $\boldsymbol{C}^n$ à valeurs dans $GL(m,\boldsymbol{C})$. On considère dans la suite une équation aux différence par rapport à une fonction matricielle $\Phi(x)$ de la forme suivante:

$$\Phi(x+e_i)=A_i(x)\cdot\Phi(x) \tag{1}$$

pour $1\leqq i\leqq n$. Supposons que les matrices $A_i(x)$ satisfassent à la condition de compatibilité:

$$A_i(x+e_j)\cdot A_j(x)=A_j(x+e_i)\cdot A_i(x) \tag{2}$$

pour $1\leqq i,j\leqq n$ telles qu'élles définissent de façon naturelle un cocycle de la cohomologie $H^1(\boldsymbol{Z}^n, GL(m,\boldsymbol{C}(x)))$. On désigne par $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ les coordonnées affines de x par rapport à la base E et par x' le point de $\boldsymbol{C}^{n-1}$ des coordonnées $(x_2,\cdots,x_n)$. Supposons que

(H, 1): *$A_i(x)$ $(1\leqq i\leqq n)$ aient les expansions de Laurent en $x_1=\infty$, x' etant fixé, de la forme suivante*:

$$A_i(x)=A_i^0(x')\cdot x_1^{h_i}+A_i^1(x')\cdot x_1^{h_i-1}+\cdots \tag{3}$$

où $A_i^t(x')$ désignent fonctions rationnelles de x' et que dans un voisinage V d'un point x' dans $\boldsymbol{C}^{n-1}$ elles satisfassent aux suivantes: i) *Les déterminants de $A_i^0(x')$ $(1\leqq i\leqq n)$ sont différents de zéro.* ii) *$A_i^0(x')$ $(2\leqq i\leqq n)$ ne dépendent pas de x' donc sont égales aux constantes A_i^0 réspectivement. De plus A_i^0 sont toutes diagonalisables.* iii) *Les valeurs propres de la matrice $A_1^0(x')$ sont toutes différentes les unes des autres.* Alors on a

Théorème 1. *A l'hypothèse* (H, 1) *il existe une suite formelle de Laurent $S(x)=1+\sum_1^\infty S^t(x')/x_1^t$, $S^t(x')$ étant des matrices rationnelles de x', telles que les matrices $\overline{A}_i(x)=S(x+e_i)^{-1}\cdot A_i(x)\cdot S(x)$ aient les suites formelles suivantes*:

$$\begin{aligned}&\overline{A}_1(x)=x_1^{h_1}\cdot(A_1^0(x')+\overline{A}_1^1(x')/x_1) \qquad \text{et}\\ &\overline{A}_i(x)=x_1^{h_i}\cdot(A_i^0+\overline{A}_i^1(x')/x_1+\overline{A}_i^2(x')/x_1^2+\cdots)\end{aligned} \tag{4}$$

pour $i\geqq 2$. Ici $A_1^0(x)$ se montre indépendante de x' qu'on désignera par