82. *Le Bruit Blanc et Calcul Stochastique*

Par Shigeyoshi OGAWA

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., June 3, 1975)

1. Dans la présente note, on s'intéresse à construire une base concrète pour le calcul stochastique concernant le bruit blanc. La nécessité de l'étude tire son origine d'une question primitive; Etant donné un processus aléatoire de la forme $f(B_t)$, où B_t le processus de mouvement brownien à valeurs dans $\boldsymbol{R}^1$ et $f(x)(x \in \boldsymbol{R}^1)$ une fonction réelle de la classe C^2, on considère sa dérivée en t. En appliquant la formule classique de différentiation, on souhaite d'obtenir l'expression comme suit;

$$\frac{d}{dt} f(B_t) = f'(B_t) \cdot \dot{B} \qquad \left(f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \right), \tag{1}$$

où $\dot{B}$ est la dérivée de B_t, notamment le bruit blanc.

On se demande la légitimité de cette opération, qui dépend évidemment du sens que l'on fournit au terme $f'(B_t)\cdot \dot{B}$. On veut une formalisme de calcul stochastique d'après laquelle l'expression (1) soit valide. Comme on le voit plus tard, ce but se réalise à l'aide de la théorie de B-dérivées et l'intégrale stochastique de type $\mathcal{J}_{1/2}$ introduite et étudiée par l'auteur ([1]–[3]).

2. Soit $\{B_t, t \geqslant 0\}$ le processus de mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sans perdre la généralité, on va supposer que la valeur $|B_t(\omega)|$ soit finie pour tous t et $\omega \in \Omega$. Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, à support compact et $\boldsymbol{S}$ celui des fonctions indéfiniment dérivables, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. En particulier, étant fixé un intervalle compact $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{R}_+$, on entend par $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n)$ le sous-espace de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ formé par des fonctions de $(n+1)$-variables $F(t, \boldsymbol{x})(t \in \boldsymbol{T}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$ qui pour chaque t fixé appartient à la classe $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}^n)$ et à la classe $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ pour chaque $\boldsymbol{x}$ fixé. On désigne par $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n; \Omega)$ (ou par $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n; \Omega)$ resp.) l'ensemble des processus aléatoires généralisés sur $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n)$ (ou, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n)$ resp.); un élément X de $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n; \Omega)$ est, par exemple, une application linéaire, continue de $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{A}(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n)$ introduit dans l'article précédent [3] n'est autre que $\mathcal{D}'(\boldsymbol{T}\times \boldsymbol{R}^n; \Omega)$.

En ce qui concerne la construction d'un processus aléatoire généralisé, on a l'énoncé suivant qui est une variation triviale du "Théorème des Noyaux" dû à L. Schwartz.