

110. Topologische Begründung der ebenen Geometrie ohne Benutzung des Begriffes der Zahlenebene.

Von Wilhelm Süß.

Kagoshima Kotogakko.

(Rec. June 18, 1927. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1927.)

*D. Hilbert*¹⁾ hat das *Helmholtz-Liesche* Problem der gruppentheoretischen Begründung der Geometrie dadurch ganz wesentlich gefördert, dass er die Gruppe der Bewegungen der ebenen Geometrie durch drei einfache Axiome innerhalb der Gruppe der topologischen Selbstabbildungen der Ebene gekennzeichnet hat, ohne irgendeine Voraussetzung über die Differenzierbarkeit der die Bewegungen vermittelnden Funktionen zu machen. Bei Beantwortung einer von Hilbert dabei gestellten Frage wurde ich zu einer die *Hilbertsche* umfassenden Darstellung geführt.²⁾ Von *Hilbert* wird die Ebene von vornherein als zweidimensionale Zahlenmannigfaltigkeit oder deren topologisches Aequivalent eingeführt, ein Umstand, der *H. Poincaré* veranlasst hat, auch die *Hilbertsche* Formulierung noch nicht vollkommen befriedigend zu heissen. *R. L. Moore*³⁾ hat deshalb einen Aufbau der ebenen Geometrie durchgeführt, der die Vorzüge des *Hilbertschen* vor seinen Vorgängern teilt, aber den Begriff der "Zahlenebene" in den Axiomen vermeidet. Hier will ich einen Weg skizzieren, auf dem man das Gleiche für meine oben genannte²⁾ Variante der *Hilbertschen* Begründung erreichen kann.⁴⁾

Unserm Aufbau legen wir mit *Moore* die Begriffe *Punkt*, *Umgebung* und *Bewegung* zugrunde. Sie sind durch folgendes Axiomensystem definiert: Gegeben sei eine Menge von Punkten, aus der gewisse Teilmengen als Umgebungen herausgehoben werden. Eine Bewegung sei eine ein-eindeutige Abbildung der Punktmenge auf sich selbst. Wir fordern:

- 1) Es existiert mindestens eine Umgebung.
- 2) Sind R und K zwei Umgebungen, R' , K' ihre Vereinigungs-

1) *Math. Ann.* **56**, 381-422; oder *Grundlagen der Geometrie*, Anhang IV.

2) *Tôhoku Math. Journ.* **26**, 365-385, *Japan. Journ. Math.* **2**, 91-99.

3) *American Journ. Math.* **41**, 299-319.

4) Zur Behandlung der mir schon vorher bekannten Problemstellung wurde ich durch eine freundliche Zuschrift von Herrn *F. Schur* in Breslau veranlasst.