10. Über die Potenzsumme der Charaktere einer Permutationsgruppe.

Von Kiyoshi TAKETA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Dec. 1, 1927. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1928.)

Aus den n Variablen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ der Permutationsgruppe Γ seien die $m=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)$ Variationen k-ter Klasse gebildet und mit $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ bezeichnet. Führen wir auf den Variablen x die Permutationen von Γ aus, so werden unter den Variablen y eine mit Γ isomorphe Permutationsgruppe hervorgerufen, die wir mit $\Gamma^{(k)}$ bezeichnen wollen. Bedeuten nun χ_i bez. $X_i^{(k)}$ die Charaktere der entsprechenden Permutationen von Γ bez. $\Gamma^{(k)}$, dann ist offenbar

$$(1) \qquad X_i^{(k)}=\chi_i(\chi_i-1)(\chi_i-2)\ldots\ldots(\chi_i-k+1),$$

auch für $k>\chi_i$, weil alsdann die beiden Seiten verschwinden. Da aber die Summe der Charaktere einer Permutationsgruppe der Ordnung mal Anzahl der Transitivitätssysteme gleich ist,[1] so gilt, wenn wir diese Anzahl bei der Gruppe $\Gamma^{(k)}$ mit ρ_k und die gemeinsame Ordnung der Gruppen mit g bezeichnen,

$$(2) \qquad \rho_k g=\sum_{i=1}^{g} X_i^{(k)}=\sum_{i=1}^{g}\chi_i(\chi_i-1)\ldots\ldots(\chi_i-k+1)$$

oder

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{g}\chi_i(\chi_i-1)(\chi_i-2)\ldots\ldots(\chi_i-k+1)\equiv 0 \pmod{g},$$

was auch für $k>n$ gilt, weil $\chi_i\leqq n$ und somit die linke Seite verschwinden.

Aus (2) erhält man für $k=2$

$$\rho_2 g=\sum_{i=1}^{g}\chi_i^2-\sum_{i=1}^{g}\chi_i=\sum_{i=1}^{g}\chi_i^2-\rho_1 g$$

also

$$\sum_{i=1}^{g}\chi_i^2=(\rho_1+\rho_2)\,g,$$

1) Vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), 74.