175. Zur Theorie der Kreisscharen im konformen Raume, I.

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Rec. Nov. 17, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 2, 1928.)

Im folgenden möchte ich eine Theorie der Kreisscharen im konformen Raume in der Form aufstellen, dass sie auf meiner Kugelscharentheorie beruht[1] und dann weitere Ergebnisse vom folgenden Grundprinzip aus erzielen: *Es gilt für Kreisscharen im kleinen nichteuklidische Regelscharentheorie.*

1. Theorie der Kugelbüschelscharen. Betrachtet man ein Paar zueinander senkrechtstehende Kugeln $\xi=\xi(\sigma)$, $\xi'=\xi'(\sigma)$, $(\xi\xi=\xi'\xi'=1,\ \xi\xi'=0,\ d\sigma^2=d\xi d\xi)$ allgemeiner Lage des Kreises $\varkappa$ als ein Element der Kreisschar, so bestehen die natürlichen Gleichungen der Kugelschar $\xi(\sigma)$ aus:

$$(1)\quad P^{-1}=[(\ddot{\xi}\ddot{\xi})-1]^{\frac{1}{2}}=f(\sigma)\,,\quad \dot{\xi}=\frac{d\xi}{d\sigma}\ \text{usw.},$$

$$(2)\quad \mathrm{P}_3{}^{-1}=-\mu\tau^{-1}=(\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\ddot{\xi}\|^2}):(\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\ddot{\xi}\dddot{\xi}\|^2}.\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\|^2})=F(\sigma)\,,$$

$$(3)\quad \mathrm{P}_4{}^{-1}=id\log\mu:d\sigma=\Psi(\sigma),$$

wobei P^{-1}=die K-Dualkrümmung, τ^{-1}=die K-Dualtorsion, μ^2=die K-Raumkrümmung[2] sind. Wenn der Kreis $\varkappa$ der Schar auf $\xi(\sigma)$ liegt, so wird seine Lage durch die Kosinus $(\xi' t)$, $(\xi' z)$, $(\xi' X)$, $(\xi' \mathfrak{X})$ von den vier Winkeln bestimmt, die der Kreis $\varkappa$ bez. mit der K-Normalkugel (t), K-rektifizierenden Kugel (z), K-Absolutpolare (X) und der K-Absoluten $(\mathfrak{X})$ bilden, die alle kovariant sind und in der Beziehung

$$(4)\quad (\xi' t)^2+(\xi' z)^2+(\xi' X)^2+(\xi' \mathfrak{X})^2=1$$

stehen[3]. Also *sind* (1), (2), (3), $(\xi' t)=\varphi(\sigma)$, $(\xi' z)=\psi(\sigma)$, $(\xi' X)=\Phi(\sigma)$ *und* $(\xi' \mathfrak{X})=\phi(\sigma)$, *von denen wegen* (4) *nur sechs wesentlich sind, als natürliche Gleichungen der allgemeinen Kugelbüschelschr gebrauchbar.*

---

1) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, I. The Science Reports of the Tohoku Imperial University, Ser. I, 17 (1928). Vgl. E. Vessiot, Contributions à là Géométrie conforme, cercles et surfaces cerclées. Journal de Math., 9. sér. 2 (1923). Wegen der weiteren Literaturen siehe diese Arbeit Herrn Vessiots.

2) Takasu, a.a.O., SS. 290 und 293.

3) Die genannten Kosinus sind bare tetrazyklische Koordinaten auf ξ. Wenn die ersten drei gegeben sind, wird die vierte bis auf das Vorzeichen bestimmt, das von der Orientierung von $\mathfrak{X}$ abhängt.