173. *Endgültige Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume, I.*

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 2, 1928.)

In meiner Abhandlung: Differentialkugelgeometrie, II[1] habe ich dem Fundamentalsatze der Theorie von Kugelkongruenzen $\xi=\xi(u^1, u^2)$, $((\xi\xi)_5=1)$ mit zwei Enveloppenmänteln $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u^1,u^2)$, $((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5\equiv 0)$; $\overline{\mathfrak{x}}=\overline{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$, $((\overline{\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{x}})_5\equiv 0)$ im konformen Raume fünf Gestalten I–V gegeben[2]. Z.B. hiessen I und V:

I. *Sind zwei quadratische Formen* $\mathcal{G}_{hk}(u^1, u^2)\, du^h du^k$ *und* $D_{hk}(u^1,u^2)\, du^h du^k$, *von denen die erste positiv definit ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen* $(555)_2$ *gelten, so existieren für* $(555)_1$ *stets Kugelkongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf konforme Transformationen eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle* $(555)_3$ *und* $(555)_4$ *eine ein-parametrige Schar wesentlich verschiedener Kugelkongruenzen, die dieselben Grundformen haben*[3].

V. *Wenn drei Differentialformen* $\mathcal{G}_{hk}(u^1, u^2)\, du^h du^k$, $\vartheta_{hk}(u^1,u^2) du^h du^k$ *und* $\overline{\vartheta}_{hk}(u^1,u^2) du^h du^k$, *von denen die erste positiv definit ist, mit den Bendingungen* (616), (628) *und* (629) *gegeben sind, dann lässt sich* $\mathfrak{M}_l$ *aus* (628) *bestimmen, und also wird* (614) *integrierbar, sodass eine Kugelkongruenz* $\xi(u^1, u^2)$ *dadurch bis auf konforme Transformationen sich eindeutig so bestimmen lässt, dass* $\xi\,(u^1, u^2)$ *die drei gegebenen Formen zu Grundformen hat*[4].

---

1) The Science Reports of the Tohoku Imperial University, **17** (1928).

2) Ebenda, SS. 373, 380, 386, 393, 395. Jede Gestalt hat je einen Vorteil. Vgl. Art. 138, a.a.O. Die Theorie von allgemeinen Kugelkongruenzen enthält die N.E. Flächentheorie im Ebenen-Raum als ein Spezialfall, während die konforme Flächentheorie der N.E. Theorie beliebiger spezieller Flächen entspricht.

3) Ebenda, S. 373.

4) Ebenda, S. 395.

Dabei war die Bezeichnung wie folgt:

$$D_{hk}=-(\mathfrak{x}_h\xi_k)_5\,,\ D=D_{11}D_{22}-D_{12}^2\,;\ \overline{D}_{hk}=-(\overline{\mathfrak{x}}_h\xi_k)_5\,,\ \overline{D}=\overline{D}_{11}\overline{D}_{22}-\overline{D}_{12}^2\,;$$

$$\mathcal{G}_{hk}=(\xi_h\xi_k)_5\,,\ \mathcal{G}=\mathcal{G}_{11}\mathcal{G}_{22}-\mathcal{G}_{12}^2\,;\ G_{hk}=(\mathfrak{x}_h\mathfrak{x}_k)_5\,,\ G=G_{11}G_{22}-G_{12}^2\,;$$

$$A=\frac{1}{2i}(\mu\mathfrak{x}-\overline{\mu}\,\overline{\mathfrak{x}})\,,\ (AA)_5=1\,;\ U=\frac{1}{2}(\mu\mathfrak{x}+\overline{\mu}\,\overline{\mathfrak{x}})\,,\ (UU)_5=1\,;$$

$$\vartheta_{hk}=-(A_k\xi_h)_5\,,\ \vartheta=\vartheta_{11}\vartheta_{22}-\vartheta_{12}^2\,;\ \overline{\vartheta}_{hk}=-(U_k\xi_{h5})\,,\ \overline{\vartheta}=\overline{\vartheta}_{11}\overline{\vartheta}_{22}-\overline{\vartheta}_{12}^2\,;$$

$$\mathcal{G}^{hk}=\frac{1}{\mathcal{G}}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{G}_{hk}},\ \mathfrak{M}_h=(AU_h)_5\,,\ \mathfrak{S}^{11}=0,\ -\mathfrak{S}^{21}=\mathfrak{S}^{12}=\mathcal{G}^{-\frac{1}{2}},\ \mathfrak{S}^{22}=0\,;$$

$$E^{11}=0,\ -E^{21}=E^{12}=G^{-\frac{1}{2}},\ E^{22}=0.$$