4. Über den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe.

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. Dec. 25, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1930.)

Die vorliegende Arbeit schließt sich an den beiden Arbeiten von mir: Ueber die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. 100; Ueber die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe, die in der Math. Zeitschr. erscheinen wird. Diese Arbeiten werden bzw. mit A. und C. zitiert.

Die Struktur des Automorphismenringes bzw. der Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ wurde in A. durch Benützung der vorderen und hinteren Loewyschen Kompositionsreihen aufklärt. Wenn man nun die sämtlichen charakteristischen Reihen von $\mathfrak{A}$ betrachtet, die ich in C. bestimmt habe, so kann man genau wie bei A. vorgehen und einige interessante Resultaten erhalten.

Der Einfachheit halber machen wir folgende Voraussetzung: Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist eine Potenz einer Primzahl p. Der Typus von $\mathfrak{A}$ ist $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_m)$, wo $e=e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots\ldots \geqq e_m$. Unter den e_i kommt genau $n_\varkappa$-mal $\varkappa$ vor. Den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten nun eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe (Vgl. C.)

$$\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{A}_2,\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{A}_t=0.$$

Die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{A}$, (d.h. die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{o}$), die $\mathfrak{A}_i$ in Null (d.h. in die aus dem Einheitselement bestehende Gruppe $\mathfrak{A}_t$) überführen, bildet ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{o}_i$ in $\mathfrak{o}$. Wir erhalten also eine Reihe von Idealen in $\mathfrak{o}$:

$$\mathfrak{o}_0=0,\quad \mathfrak{o}_1,\quad \mathfrak{o}_2,\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{o}_t=\mathfrak{o}.$$

Man kann nun den folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Unter den Restklassenringen*

$$\mathfrak{o}_1/\mathfrak{o}_0,\quad \mathfrak{o}_2/\mathfrak{o}_1,\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{o}_t/\mathfrak{o}_{t-1}$$

kommt ein Ring $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}$ *mit* $p^{n_\alpha(n_{\beta+1}+\ldots\ldots+n_e)}$ *Elementen und ein Ring* $\mathfrak{S}_\alpha$ *mit* $p^{n_\alpha(n_\alpha+\ldots\ldots+n_e)}$ *Elementen vor, wo* $\alpha=1, 2, \ldots\ldots, e$; $\beta<\alpha-1$. $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}$ *bzw.* $\mathfrak{S}_\alpha$*—dieser aufgefasst als eine Abelsche Gruppe gegenüber Addition— hat den Typus* $(1, 1, \ldots\ldots, 1)$. *Es ist* $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}^2=0$. $\mathfrak{S}_\alpha$ *besitzt das*