PAPERS COMMUNICATED

30. *Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes II.*

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. March 1, 1930. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1930.)

In dem ersten Teil dieser Arbeit[1] habe ich bewiesen, daß der Strahl eines p-Ringes modulo einem maximalen nilpotenten Unterring eine Sylowgruppe der Einheitengruppe des Ringes bildet. In der vorliegenden werde ich zeigen, daß die Reihe von Ableitungen (Kommutatorgruppen) der Sylowgruppe nichts anderes als die Reihe von Strahlen modulo den Ableitungen (Kommutatoridealen) des maximalen nilpotenten Unterringes ist.

Wir betrachten zunächst einen allgemeinen Ring $\mathfrak{o}$, der nicht notwendig endlich zu sein braucht. Durchlaufen zwei Elemente A und B alle Elemente des Ringes $\mathfrak{o}$, so nennen wir den durch $AB-BA$ erzeugten Ring $\mathfrak{k}$, den Kommutatorring von $\mathfrak{o}$, der nach der Definition durch $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt wird. Der Durchschnitt[2] aller $\mathfrak{k}$ enthaltenden zweiseitigen Ideale bzw. Rechtsideale heisst das Kommutatorideal bzw. Kommutatorrechtsideal von $\mathfrak{o}$ und wird mit $\mathfrak{k}^*$ bzw. $\mathfrak{r}$ bezeichnet. Dann ist ersichtlich $\mathfrak{k}^*=(\mathfrak{k}, \mathfrak{o}\mathfrak{k}\mathfrak{o})$, $\mathfrak{r}=(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}\mathfrak{o})$. Falls $\mathfrak{o}$ das Einheitselement besitzt, so ist $\mathfrak{k}^*=\mathfrak{o}\mathfrak{k}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{k}\mathfrak{o}$.

Satz 1. *Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{k}^*$ von $\mathfrak{o}$ nach dem Kommutatorideal $\mathfrak{k}^*$ ist kommutativ und jedes Ideal $\mathfrak{h}$ mit dem kommutativen Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{h}$ enthält das Kommutatorideal $\mathfrak{k}^*$ von $\mathfrak{o}$.*

Sind A und B zwei Elemente aus $\mathfrak{o}$, so ist nach der Definition von $\mathfrak{k}$ stets $AB=BA$ (mod $\mathfrak{k}$, also $\mathfrak{k}^*$). Ist nun $AB=BA$ (mod $\mathfrak{h}$) für jedes A, B aus $\mathfrak{o}$, so ist $AB-BA=0$ (mod $\mathfrak{h}$) und daher $\mathfrak{k}=0$ (mod $\mathfrak{h}$). Nach der Definition von $\mathfrak{k}^*$ ist also $\mathfrak{k}^*$ in $\mathfrak{h}$ enthalten.

Es sei von jetzt an $\mathfrak{o}$ ein Ring mit dem Einheitselement E.

Satz 2. *Der Durchschnitt der Einheitengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{o}$ und des Strahls $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ modulo einem Unterring $\mathfrak{u}$ bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{u}$ den Vielfachenkettensatz für Rechtsideale erfüllt.*[3]

1) Math. Ann. Bd. **102** (1929), S. 273-282, Vgl. die Voranzeige, Proc. **5** (1929) unter dem Titel: Über die zugehörige Gruppe eines endlichen Ringes.

2) Die Existenz dieses Durchschnitts soll vorausgesetzt werden. Sie folgt daraus, daß $\mathfrak{o}$ den Vielfachenkettensatz für Ideale bzw. Rechtsideale erfüllt.

3) Wenn $\mathfrak{u}$ den Vielfachenkettensatz nicht erfüllt, so kann dieser Durchschnitt keine Gruppe bilden. Beispiel: $\mathfrak{o}$ sei der rationale Körper, $\mathfrak{u}$ der Integritätsbereich. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ und $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{u}\}$ gleich der Gesamtheit der von Null verschiedenen Zahlen aus $\mathfrak{u}$, die bekanntlich keine Gruppe bildet.