99. *Ueber die Teilbarkeit der Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper.*

Von Hideo ARAMATA.

Daiichi Kôtôgakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1931.)

Ist K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und k sein Unterkörper, so wird vermutet, dass die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ durch $\zeta_k(s)$ teibar, d.h., dass der Quotient $\Phi(s)=\dfrac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ eine ganze Funktion von s ist. Wie Herr Suetuna mir bemerkt hat, wäre es möglich, diese Vermutung rein gruppentheoretisch zu bestätigen, wenigstens falls K/k Galoissch ist. Weil sich die Funktion $\Phi(s)$ durch die Artinschen L-Funktionen[1] für K/k darstellen lässt, genügt es in der Tat zu zeigen, dass der zugehörige Charakter:

$$\varphi(\sigma)=\sum_{i=2}^{h} f_i \chi_i(\sigma)$$

als lineare Kombination der Charakter $\chi_{\psi_k^\rho}$ $(k \neq 1)$ mit *positiven* Koeffizienten darstellbar ist, wo $\chi_{\psi_k^\rho}$ den durch den einfachen Charakter ψ_k der zyklichen Untergruppe $\{\rho\}$ induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$ bedeutet. Denn es ist von vornherein klar, dass $\Phi(s)$ in der ganzen s-Ebene eindeutig ist. Nun ist es mir gelungen, unter gewisser Annahme über die Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k, diese Vermutung tätsächlich festzustellen.

Unsere Annahme ist, dass sich je zwei zykliche Untergruppen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathfrak{G}$ nie kreuzen, oder genauer, dass nur einer der folgenden drei Fälle möglich ist:

$$\mathfrak{Z}_1 > \mathfrak{Z}_2, \quad \mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_2 \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{Z}_1 \wedge \mathfrak{Z}_2 = 1.$$[2]

Solche Gruppe kann auf folgende Weise in element-fremde „Klassenkomplexe" zerlegt werden.

Es sei σ_1 ein Element der höchsten Ordnung g_1 aus $\mathfrak{G}$. Die Klassen der Gruppe $\mathfrak{G}$, welche alle Potenzen $\sigma_1^k (1 \leq k < g_1)$ enthalten, fassen wir zu den ersten „Klassenkomplex" $\mathfrak{K}_1$ zusammen; die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{K}_1$ sei mit k_1 bezeichnet.

---

1) E. Artin: Ueber eine neue Art von L-Reihen. (Hamburgische Abhandlungen 3, 1923).

2) Auf die Gruppen dieser Art, zu welcher die gebrochenen linearen Kongruenzgruppen angehören, wurde ich von Herrn Prof. Takagi hingewiesen.