9. Über den Konvergenzradius der Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Feb. 12, 1932.)

Unter $f(x, y)$ verstehen wir eine im Dizylinder $|x|<a$, $|y|<b$ reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen x und y. Die den Anfangspunkt (o, o) durchgehende Lösung von $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ bezeichnen wir mit $y=\varphi(x)$ und ihren Konvergenzradius mit r. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung keine identisch verschwindende Lösung besitzt.

Satz 1. $F(s, t)$ sei eine stetige und positive Funktion für $o \leqq s<a$ und $o \leqq t<b$, und noch genüge der Lipschitzschen Bedingung für $o \leqq s<a$, $o \leqq t<b$. Wenn

$$|f(x, y)| \leqq F(|x|, |y|) \qquad \textit{für} \qquad |x|<a, \quad |y|<b$$

ist, so gilt

$$r \geqq \operatorname{Min}(a, \Phi^{-1}(b)),$$

wobei $\Phi^{-1}(t)$ die inverse Funktion der den Anfangspunkt (o, o) durchgehenden Lösung $t=\Phi(s)$ von der Differentialgleichung $\frac{dt}{ds}=F(s, t)$ ist.

Beweis. Es braucht offenbar nur den Fall $r<a$ zu betrachten. Wir beweisen zuerst die Relation $\operatorname{Max}_{|x|<r}|\varphi(x)| \geqq b$. Wäre $\operatorname{Max}_{|x|<r}|\varphi(x)|<b$, so könnte man eine positive und genügend kleine Zahl ε derart finden, dass $\operatorname{Max}|\varphi(x)| \leqq b(1-2\varepsilon)$ und $r(1+\varepsilon)<a$ gelten. Dann hat $f(x, y)$ eine Schranke M im Dizylinder $|x| \leqq r(1+\varepsilon)$, $|y| \leqq b(1-\varepsilon)$. Wir betrachten einen beliebigen Punkt ξ auf dem Konvergenzkreis $|x|=r$. Für eine positive Zahl $\delta<\varepsilon$ ist $f(x, y)$ regulär im Dizylinder $|x-\xi(1-\delta)| \leqq r\varepsilon$, $|y-\varphi(\xi(1-\delta))| \leqq b\varepsilon$, denn es besteht

$$|x| \leqq |\xi(1-\delta)|+|x-\xi(1-\delta)| \leqq r(1+\varepsilon-\delta)$$

und

$$|y| \leqq |\varphi(\xi(1-\delta))|+|y-\varphi(\xi(1-\delta))| \leqq b(1-\varepsilon).$$

Da der Konvergenzradius der Lösung von $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ mit den