18. Über die Fermatsche Vermutung, VII.

Von Taro MORISHIMA.
Furitsu Kotogakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1932.)

Vandiver[1] hat den folgenden Satz bewiesen:
Zur Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung

$$x^l+y^l+z^l=0 \tag{1}$$

im Falle I[2] ist notwendig, dass der erste Faktor h der Klassenzahl des Kreiskörpers $P(\zeta)$ durch l^3 teilbar ist, wo $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{l}}$.

Ich will diese Ergebnisse erweitern und den Satz beweisen:
Hat die Gleichung (1) *eine Auflösung im Falle I und ist*

$$20579903\cdot 75571 \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } l),$$

so muss der erste Faktor h der Klassenzahl die Bedingung erfüllen:

$$h\equiv 0 \qquad (\text{mod } l^{12}).$$

Aus (1) folgt

$$(x+\zeta y)=\mathfrak{a}^l, \qquad \left(\frac{\zeta}{\mathfrak{a}}\right)=\zeta^{\frac{N\mathfrak{a}-1}{l}}=\zeta^{\frac{(x^l+y^l/x+y)-1}{l}}=1, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $P(\zeta)$ ist. Setzt man[3]

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{1-\zeta^r}{1-\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^{-r}}{1-\zeta^{-1}}}, \quad E_m(\zeta)=\prod_{i=0}^{\mu-1}\varepsilon(\zeta^{r^i})^{r^{-2im}}, \quad \left(\frac{E_m(\zeta)}{\mathfrak{a}}\right)=\zeta^{\text{ind}\, E_m(\zeta)},$$

$$b_1=-\frac{1}{2}, \quad b_{2i}=(-1)^{i+1}B_i \text{ (Bernoullische Zahl)}, \quad b_{2i+1}=0,$$

$$D_i=\left[\frac{d^i \log(x+e^v y)}{dv^i}\right]_{v=0},$$

so ist nach Vandiver[4]

$$b_{(2m-1)l+1}\cdot D_{l(l-2m)}\equiv\frac{2l \,\text{ind}\, E_m(\zeta)}{r^{2m}-1} \qquad (\text{mod } l^2) \tag{3}$$

und nach Kummer[5]

$$\text{ind}\left(\frac{1-\zeta^s}{1-\zeta}\right)\equiv\frac{s-1}{2}\,\text{ind}\,\zeta-2\sum_{m=1}^{\mu-1}\frac{\text{ind}\, E_m(\zeta^s)-\text{ind}\, E_m(\zeta)}{r^{2m}-1} \qquad (\text{mod } l). \tag{4}$$

---

1) Vgl. Annals of Math., (2), **26** (1925).
2) $(x, y, z, l)=1$.
3) r ist primitive Wurzel modulo l und $\mu=\frac{l-1}{2}$.
4) Vgl. Annals of Math., (2), **26** (1925), S. 226.
5) Vgl. Crelles Journ., **56**, S. 277.