PAPERS COMMUNICATED

60. Über eine stetige Matrixfunktion.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 13, 1932.)

Mit den grossen lateinischen Buchstaben A, B, C, u.s.w. bezeichnen wir die Matrizen n-tes Grades, deren Elemente a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, u.s.w. sind, und ihre Determinanten bezeichnen wir mit $|A|$, $|B|$, $|C|$, u.s.w.

Satz 1. Wenn eine stetige Matrixfunktion $\varphi(A)$ für je drei Matrizen, A, B und C die Relation

$$(1) \qquad \varphi(ABC)=\varphi(ACB)$$

erfüllt, so hängt $\varphi(A)$ nur von der Determinante $|A|$ ab.

Beweis. Ersetzt man in (1) B durch $C^{-1}B$, so erhält man

$$\varphi(AC^{-1}BC)=\varphi(AB),$$

oder allgemeiner

$$(2) \qquad \varphi(AR_1^{-1}BR_1R_2^{-1}CR_2\ldots\ldots)=\varphi(ABC\ldots\ldots).$$

Wir nehmen zuerst an, dass die ersten n Hauptdeterminanten von A

$$\alpha_i=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots\cdots a_{ii}\end{vmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

alle von Null verschieden sind, wobei $\alpha_n=|A|$ und $\alpha_0=1$ sind. Man kann eine Matrix $B=(b_{ij})$ derart bestimmen, dass $b_{ij}=0$ für $i>j$, $=1$ für $i=j$ und für $i<j$ (wegen $\alpha_i\neq 0$)

$$\begin{array}{l} a_{11}b_{1i}+\cdots\cdots+a_{1,i-1}b_{i-1,i}+a_{1i}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1,1}b_{1i}+\cdots\cdots+a_{i-1,i-1}b_{i-1,i}+a_{i-1,i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n) \end{array}$$

Es ist dann AB gleich einer Matrix $C=(c_{ij})$, wobei $c_{ij}=0$ für $i<j$ und $=\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}$ für $i=j$. Wenn man mit $T=(t_{ij})$ eine Matrix bezeichnet, dass $t_{ij}=0$ für $i\neq j$ und $=t_i\neq 0$ für $i=j$ ist, so gilt nach (2)

$$\varphi(AT^{-1}BT)=\varphi(AB)=\varphi(C)=\varphi(TCT^{-1})$$

Wenn man nun $\frac{t_{i+1}}{t_i}$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ gleichzeitig nach Null streben lässt, so konvergiert $T^{-1}BT$ nach der Einheitsmatrix und TCT^{-1} nach