PAPERS COMMUNICATED

10. *Über die Teilbarkeit der Dedekindschen Zetafunktionen.*

Von Hideo ARAMATA.
Daiichi Kôtôgakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 13, 1933.)

Mein Zweck ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist ein algebraischer Zahlkörper K in bezug auf den Grundkörper k galoissch, dann ist $\zeta_K(s)$ durch $\zeta_k(s)$ teilbar, d.h. der Quotient

$$Z(s)=\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$$

ist dann eine ganze Funktion von s.[1]

Hierzu stützen wir uns auf folgende Sätze:

Satz 1. Es sei q eine ganze positive Zahl. Ist dann $\varphi(k)$ bzw. $\mu(k)$ die Eulersche bzw. Möbiussche Funktion, so ist

$$\sum_{k\mid q}(\varphi(k)-\mu(k))\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{a}{k}}=-\sum_{k\mid q}(\varphi(k)-\mu(k)).$$

Beweis. Wegen

$$\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{k}{(k,d)}\right)}\mu\left(\frac{k}{(k,d)}\right),\quad k\mid q \tag{1}$$

kommt es nur darauf an, die Relation

$$\sum_{k\mid q}\frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)}=\frac{q}{\varphi(q)}$$

zu beweisen, was leicht einzusehen ist.

Satz 2. Es sei $d\mid q$, $1<d<q$. Alsdann gilt

$$\sum_{k\mid q}\varphi(k)\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=0,\quad \sum_{k\mid q}\mu(k)\sum_{(a,q)=1}e^{2\pi i\frac{ad}{k}}=0.$$

Beweis. Aus (1) lassen sich beide elementar herleiten.

Setz 3. Für $d\mid q$, $1<d<q$ ist

---

1) Vgl. E. Artin, „Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Math. Annalen **89** (1923), 147–156; und auch

H. Aramata, „Über die Teilbarkeit der Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Proc. **7** (1931), 334–336.