134. *Einige Bemerkungen über den Elementarteilersatz.*

Von Masatada TAZAWA.
Mathematisches Institut, Tohoku Kaiserliche Universität, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

1. Es ist bekannt, dass der Elementarteilersatz für eine Matrix im Hauptidealring gilt.[1] Hier wollen wir die Umkehrung beweisen: *wenn der Elementarteilersatz für jede Matrix in einem Ring gilt, so ist der Ring ein Hauptidealring. Dabei ist es vorausgesetzt, dass der Teilerkettensatz für den Ring gilt.*

Beweis. Da der Elementarteilersatz für jede Matrix in unserem Ring gilt, können wir speziell eine Diagonalmatrix $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ vom Grade 2 wählen. Wenn wir zwei passende unitäre Matrizen $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ und $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ wählen, so gilt die folgende Relation

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

wo ε_1, ε_2 die Elementarteiler von der Matrix A bilden. Also ist

(1) $$a_1q_{11}=\varepsilon_1p_{11},\quad a_1q_{12}=\varepsilon_2p_{12},\quad a_2q_{21}=\varepsilon_1p_{21},\quad a_2q_{22}=\varepsilon_2p_{22}.$$

Daraus folgen die Kongruenzen:

(2) $$a_1q_{11}\equiv 0\ (\varepsilon_1),\qquad a_1q_{12}\equiv 0\ (\varepsilon_2),\qquad \equiv 0\ (\varepsilon_1).$$

Da der Teilerkettensatz für unsern Ring gilt, können wir nach dem Noetherschen Zerlegungssatz das Hauptideal (ε_1) in der folgenden Gestalt ausdrücken:

$$(\varepsilon_1)=[\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{Q}_r]_r\,,$$

wo $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{Q}_r$ Primärdeale sind, zu denen bzw. Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{P}_r$ gehören.

Nach (2) ist

$$a_1q_{11}\equiv 0\ (\mathfrak{Q}_i)\qquad (i=1, 2, 3, \ldots\ldots, r)\,.$$

Wenn für einen Wert von i $a_1\not\equiv 0\ (\mathfrak{Q}_i)$ wäre, so wäre $q_{11}\equiv 0\ (\mathfrak{P}_i)$.

---

1) B. L. Van der Waerden: Moderne Algebra II, S. 122.