PAPERS COMMUNICATED

132. Zwei Bemerkungen über schlichte Funktionen.

Von Shin-ichi TAKAHASHI.
Math. Inst., Kaiserliche Universität zu Osaka u. Shiomi-Institut.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

1. Das Koeffizientenproblem.

Herr Calugaréano hat kürzlich die explizite Auflösung des Koeffizientenproblems von schlichten Potenzreihen angestellt.[1] Sein Beweis stützt sich auf den Kampé de Fērietschen Satz über Logarithmus von Funktionen. Im folgenden möchte ich aber zeigen, dass ganz einfache Methode zum Ziele führt. Dabei spielt der folgende fundamentale Satz eine wichtige Rolle.

Die Funktion $f(z)$, regulär und analytisch im Kreise $|z|<R$, ist dann und nur dann schlicht, wenn sich die Funktionenfolge

$$\phi_\nu(z)=\frac{(e^{i\nu}-1)z}{f(e^{i\nu}z)-f(z)}, \qquad \nu=0, 1, 2, \ldots\ldots$$

daselbst regulär verhält.

Es sei nun

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots, \qquad |z|<R.$$

Dann ist

$$\frac{f(e^{i\nu}z)-f(z)}{(e^{i\nu}-1)z}=1+a_2\frac{\sin 2\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\xi+\cdots\cdots+a_n\frac{\sin n\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\xi^{n-1}+\cdots\cdots,$$

$$\xi=e^{i\frac{\nu}{2}}z$$

so dass

$$\phi_\nu(z)=\frac{(e^{i\nu}-1)z}{f(e^{i\nu}z)-f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(\nu)}\xi^{n-1},$$

wobei

$$c_n^{(\nu)}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_2^{(\nu)} & a_3^{(\nu)} & a_4^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_n^{(\nu)} \\ 1 & a_2^{(\nu)} & a_3^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_{n-1}^{(\nu)} \\ & 1 & a_2^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_{n-2}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & a_2^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

1) Mathematica (Cluj), **6** (1932), 75–79.