54. Ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1934.)

Wir beweisen folgendes Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme.[1]

Es seien $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ eine Basis eines Systems über einem vollkommenen Körper K. Die n^2 Elemente e_ixe_j mit einem Unbestimmten $x=\sum e_ix_i$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn das System normal-einfach ist.

Bedeutet (e) bzw. (x) die einzeilige Matrix mit Elementen e_i bzw. die einspaltige Matrix mit Elementen x_i, so ist ersichtlich $x=(e)(x)$. Nimmt man eine andere Basis (e') mit $(e)=(e')P$ an, so ist $x=(e')(x')$ mit $(x')=P(x)$. Bezeichnet man unser System mit $\mathfrak{S}$, so wird der Modul $\mathfrak{S}x\mathfrak{S}$ durch die n^2 Elemente erzeugt. Also ist die Anzahl $n(\mathfrak{S})$ der linearen unabhängigen Elemente unter den e_ixe_j gleich dem Rang des Moduls $\mathfrak{S}x\mathfrak{S}$ und sie ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir jetzt unseren Satz. Die n^2 Elemente e_ixe_j seien linear unabhängig, d.h. $n(\mathfrak{S})=n$. Ist das Radikal von $\mathfrak{S}$ von Null verschieden, so gibt es ein Element $a\neq 0$ aus $\mathfrak{S}$, das der Bedingung $a\mathfrak{S}a=0$ genügt. Dafür braucht man a nur aus einem nilpotenten Ideal $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}^2=0$ anzunehmen. Da man a als ein Basiselement annehmen kann, so ist gegen der Voraussetzung $n(\mathfrak{S})<n^2$. Daher ist $\mathfrak{S}$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{S}$ nicht einfach, also $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$, so ist $a_1\mathfrak{S}a_2=0$ für a_1 aus $\mathfrak{S}_1$ und a_2 aus $\mathfrak{S}_2$, also ist gegen der Voraussetzung auch $n(\mathfrak{S})<n^2$. Daher ist $\mathfrak{S}$ einfach.

Ist $\mathfrak{S}$ nicht normal, so ist $xa=ax$ für ein in K nicht enthaltenes Element a aus dem Zentrum, also ist gegen der Voraussetzung $n(\mathfrak{S})<n^2$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{S}$ normal-einfach sein muss.

Die Umkehrung kann man folgendermassen beweisen. Es ist

$$axb=a(e)(x)b=(e)A\bar{B}(x).$$

1) Dieser Satz für einen reellabgeschlossenen Körper K findet sich wesentlich schon bei F. Ringleb, Beiträge zur Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen I, Rendiconti Palermo **57** (1933), 311–340.