154. *Sur la théorie des ensembles analytiques dans les espaces abstraits.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1934.)

Plusieurs théorèmes sur la théorie des ensembles analytiques[1] ont été établis dans les espaces métriques complets et séparables. Dans cette note, nous allons montrer comment nous pouvons débarrasser ces deux conditions. Rappelons que la fermeture $\bar{E}$ de l'ensemble E est $E+E'$. Un espace (v), où toute fermeture est fermée sera dit un espace quasi-accessible. Nous allons donner d'abord deux théorèmes de projection.

Théorème I (Steinbach[2]) Soient R un espace quasi-accessible et S un espace métrique complet séparable. La projection P d'un ensemble analytique M dans l'espace $R\times S$[3] projeté sur R est un ensemble analytique dans R.

Démonstration :—Soit M un ensemble analytique donné dans l'espace $R\times S$:

$$(1) \qquad M=\sum \prod_k F_{n_1n_2\dots n_k}$$

où $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sont des ensembles fermés. On peut supposer que $F_{n_1n_2\dots n_k}\supseteq F_{n_1n_2\dots n_k\,n_{k+1}}$ et que la projection de $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sur l'espace S a un diamètre $<\frac{1}{k}$. Soit $Q_{n_1n_2\dots n_k}$ la projection de $F_{n_1n_2\dots n_k}$ sur l'espace R, et posons $P_{n_1n_2\dots n_k}=\bar{Q}_{n_1n_2\dots n_k}$. Nous allons prouver que $P=\sum\prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$.

Il est clair que $P\subset\sum\prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$. Inversement soit p un point de $\sum\prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$; supposons par exemple, $p\in\prod_k P_{n_1n_2\dots n_k}$ et considérons l'ensemble $p\times S$. Cet ensemble est un espace métrique complet séparable. Si $F_{n_1n_2\dots n_k}(p\times S)\neq 0$ pour tout $k=1, 2, 3, \dots$ le point

1) M. Hausdorff les appelle ensembles de Souslin; voir son "Mengenlehre" 1927 p. 177.

2) G. Steinbach: Beiträge zur Mengenlehre. Diss. Bonn. 1930. M. Steinbach a démontré ce théorème pour les espaces métriques arbitraires. Ici nous avons donné une démonstration basée sur une idée différente.

3) Soit (a, b) un point de l'espace $R\times S$. Nous considérons l'ensemble $V(a)\times V(b)$ comme voisinage du point (a, b) dans l'espace $R\times S$, où $V(a)$ et $V(b)$ sont des voisinages quelconques de a et de b dans les espaces R et S respectivement.