40. Über die L-Funktionen in einem kubischen Körper.

Von Zyoiti SUETUNA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1935.)

Es sei K ein galoisscher Körper über einem algebraischen Zahlkörper k. Für einen Charakter χ der galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ von K/k sei $L(s, \chi)=L(s, \chi; K/k)$ die Artinsche L-Funktion in k in bezug auf K. Ist nun K' ein K umfassender, galoisscher Körper über k, dann ist χ auch ein Charakter der galoisschen Gruppe von K'/k und $L(s, \chi)=L(s, \chi; K'/k)$. Also sei hier angenommen, dass K galoissch über dem rationalen Zahlkörper R ist. *Damit nun für zwei Charaktere χ und χ^* von $\mathfrak{H}$ $L(s, \chi)=L(s, \chi^*)$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\Xi_\chi(\sigma)=\Xi_{\chi^*}(\sigma) \qquad (\sigma \subset \mathfrak{G}),$$

wobei $\Xi_\chi(\sigma)$ den von χ induzierten Charakter der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/R bedeutet.[1] Wird $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\tau_1+\cdots\cdots+\mathfrak{H}\tau_n$ gesetzt, ist bekanntlich

$$(1) \qquad \Xi_\chi(\sigma)=\sum_i{}' \chi(\tau_i\sigma\tau_i^{-1}), \qquad \tau_i\sigma\tau_i^{-1} \subset \mathfrak{H}.$$

1. Zunächst sei k galoissch über R. Da $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, so ist $\chi(\tau_i\sigma\tau_i^{-1})$ zugleich mit $\chi(\sigma)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{H}$, den wir nun mit Frobenius zu χ *konjugiert* nennen. Alsdann gilt nach (1) der folgende

Satz 1. *Ist k galoissch, so ist dann und nur dann $L(s, \chi)=L(s, \chi^*)$, wenn χ^* zu χ konjugiert ist.*

Zum Beispiel sei K ein galoisscher Körper mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ der linearen Substitutionen:

$$(z, az+b); \quad a\equiv 1, 2, \ldots\ldots, p-1; \quad b\equiv 0, 1, \ldots\ldots, p-1 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

wobei p eine ungerade Primzahl ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{H}$ der Substitutionen $(z, z+b)$ bildet natürlich einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$; der $\mathfrak{H}$ zugeordnete, galoissche Körper $(p-1)$-ten Grades sei nun k. Da K über k zyklisch p-ten Grades ist, gibt es ausser der Zetafunktion von k $p-1$ L-Funktionen in bezug auf K, und es lässt sich leicht zeigen, dass alle diese gleich sind.

2. Nun sei k kubisch und nicht galoissch. Wenn k' den zu k gehörigen galoisschen Körper und $\mathfrak{H}'$ die zugehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}'$ die galoissche Gruppe von k', die wir uns nun als Permutationsgruppe von drei Ziffern 1, 2, 3 denken. Falls somit $\mathfrak{H}'\rho=(23)$, $\mathfrak{H}'\tau=(123)$ ist, dann ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}\tau+\mathfrak{H}\tau^2$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}'\rho$. Aus (1) ergibt sich in diesem Fall

$$\Xi_\chi(\sigma)=\begin{cases} \chi(\sigma)+\chi(\tau\sigma\tau^{-1})+\chi(\tau^2\sigma\tau^{-2}) & \text{für} \quad \sigma \subset \mathfrak{H}', \\ \chi(\tau^i\sigma\tau^{-i}) & \text{für} \quad \sigma \subset \mathfrak{H}'\rho\tau^{2i} \quad (0 \leq i \leq 2), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1) Vgl. E. Artin: „Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren," Hamburger Abhandlungen **8** (1930).