57. *Invariantentheorie des Integrals* $\int F(x, y, y', y'', y''')\,dx$.

Von Hitoshi HOMBU.
Mathematisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1936.)

Kürzlich hat Herr Prof. E. Cartan die Theorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene entwickelt. Seine eigene Methode in diesem Problem liegt darin, vier invarianten Pfaffschen Ausdrücke zu herleiten. Im Folgenden möchte ich mich mit dem Fall des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')\,dx$ beschäftigen.

Von den fünf invarianten Pfaffschen Ausdrücken assoziert zu dem Integral, die wir auffinden möchten, setzen wir vier in der Gestalt voraus:

$$\text{(1a)}\qquad \begin{cases} \omega = F dx + \alpha\delta y'' + \beta\delta y' + \gamma\delta y\,, \\ \omega_1 = \lambda\delta y\,, \\ \omega_2 \equiv \mu\delta y' \quad (\mathrm{mod.}\ \delta y)\,, \\ \omega_3 \equiv \nu\delta y'' \quad (\mathrm{mod.}\ \delta y, \delta y')\,, \end{cases}$$

wobei

$$\delta y'' = dy'' - y''' dx\,, \qquad \delta y' = dy' - y'' dx\,, \qquad \delta y = dy - y' dx$$

gesetzt sind. Von den fünften Pfaffschen Ausdruck ω_4 fordern wir, dass die Relation

$$\text{[I]}\qquad \omega' \equiv [\omega_3\omega_4] \quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2)$$

besteht, dadurch erhalten wir

$$\text{(2)}\qquad \alpha = F_{y'''}\,,$$

$$\text{(1b)}\qquad \omega_4 \equiv \frac{1}{\nu}\Big[-dF_{y'''} + (F_{y''} - \beta)dx\Big] \quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3)\,.$$

Aus den neuen Forderungen [II], [III], [IV]

$$\text{[II]}\qquad \omega_1' \equiv [\omega\omega_2] + a[\omega_2\omega_3] \quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1)\,,$$

$$\text{[III]}\qquad \omega_2' \equiv [\omega\omega_3] \quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2)\,,$$

$$\text{[IV]}\qquad \omega_3' \equiv \varepsilon[\omega\omega_4] \quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3)\,,$$

wo a eine passend gewählte Invariante ist und $\varepsilon = +1$ oder -1, ergeben sich

$$\lambda = \mu F\,, \qquad \mu = \nu F\,, \qquad \nu^2 = -\varepsilon F F_{y'''y'''}\,, \qquad \alpha = a\nu\,,$$

somit, unter der Bedingung $F_{y'''y'''} \neq 0$,

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} &\lambda = F^2(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, && \mu = F(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, \\ &\nu = (-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, && a = F_{y'''}(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Man darf $\varepsilon = \pm 1$ so bestimmen, dass ν reel sei.

---

1) E. Cartan, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (9) **15** (1936), S. 42-69.