PAPERS COMMUNICATED

65. *Eine Bemerkung über die Summe und den Durchschnitt von zwei Idealen in einer Algebra.*

Von Tadasi NAKAYAMA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1936.)

In der vorliegenden kurzen Note beweise ich

Satz. *Die Summe* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *von zwei Idealen*[1] $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in einer normaleinfachen*[2] *Algebra* A *über einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades*[3] K *ist dann und nur dann wieder ein Ideal in* A, *wenn für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *in* K *mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *oder* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$,
2) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *besitzen die gemeinsame Linksordnung,*
3) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *besitzen die gemeinsame Rechtsordnung,*

wo $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *wie üblich die* $\mathfrak{p}$*-adische Grenzmenge* ($\mathfrak{p}$*-Komponente*) *von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bedeutet.*[4]

Genau dasselbe gilt für den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *von zwei Idealen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$. *Also ist* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *dann und nur dann ein Ideal in* A, *wenn* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *es ist.*

Wir beginnen mit dem Beweis von

Hilfssatz 1. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien zwei beliebige Moduln in A. In der $\mathfrak{p}$-adischen Grenzalgebra $A_\mathfrak{p}$ gelten dann $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$.

Beweis. ξ sei ein beliebiges Element aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p}$. Man nehme ein η aus $\mathfrak{a}$ und ein ζ aus $\mathfrak{b}$ so, dass $\xi - (\eta + \zeta) \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ist. Dann ist

$$\xi = \bigl(\xi - (\eta + \zeta) + \eta\bigr) + \zeta\,; \qquad \xi - (\eta + \zeta) + \eta \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\,, \qquad \zeta \in \mathfrak{b}_\mathfrak{p}\,.$$

Daher ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$. Da aber ersichtlich $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} \supseteqq (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$ ist, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, wählen wir eine ganze Zahl c aus K so, dass $c\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$ ist. $\mathfrak{p}^r$ sei der $\mathfrak{p}$-Anteil von c, und sei

---

1) Unter einem Ideal verstehe ich ein normales, d. h. ein Ideal, dessen Links- und Rechtsordnung maximal sind. Nicht-normales Ideal bezeichnen wir mit Modul.

Im folgenden stütze ich mich auf den Arbeiten:

E. Artin: Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5** (1928) S. 261–289; H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931) S. 495–534; M. Deuring: Algebren, Ergebnisse der Math. Bd. **4** (1935).

2) Die entsprechende Frage in einer nicht-normaleinfachen Algebra wird leicht auf unseren Fall reduziert. Siehe M. Deuring, a. a. O., VI, § 1.

3) Unser Resultat gilt ohne weiteres auch für die Algebren über dem Quotientenkörper eines Integritätsbereiches, in dem jedes Ideal eindeutig als Primidealpotenzprodukt darstellbar ist.

4) Siehe H. Hasse, a. a. O. oder M. Deuring, a. a. O., VI.