75. *Die Geometrie des Integrals* $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}}\, dt.$

Von Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1936.)

Herr Prof. E. Cartan[1] hat neulich die Geometrie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene entwickelt. Allein seine Methode ist nicht auf die allgemeine n-dimensionale Mannigfaltigkeit anwendbar, in der die Grundlegung der Geometrie des Integrals $\int F(x, x', x'')\,dt$ sehr schwer ist. Daher ist dieses Problem noch ungelöst. Kürzlich jedoch hat Herr Prof. A. Kawaguchi[2] den speziellen Fall, in dem die Potenz F^p in bezug auf x''^i linear ist, behandelt. In dieser Arbeit möchte ich mich mit dem Falle des Integrals $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}}\,dt$ befassen[3].

1. In der speziellen Kawaguchischen Mannigfaltigkeit[4], wo die Potenz F^p gleich $a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c$ ist, wird das Integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}}\, dt \tag{1}$$

auf jeder in ihr enthaltenen Kurve $x^i = x^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ als *Bogenlänge* erklärt und s als *Invariante* definiert. Damit die Bogenlänge s bei der Transformation vom Parameter t sich nicht verändert, müssen die a_i, b und c den folgenden Bedingungen genügen[5]:

$$a_i x'^i (a_j x''^j + b) = 0\,, \tag{2}$$

$$4a_i x''^i (a_j x''^j + b) + x'^i \left\{ (a_j a_k)_{(1)i} x''^j x''^k + 2x''^j (a_j b)_{(1)i} + c_{(1)i} \right\} = p(a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)\,, \tag{3}$$

wobei
$$a_{i(1)j} = \frac{\partial a_i}{\partial x'^j}\,, \qquad a_{i(0)j} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \qquad \text{usw.}$$

Aus (2) ergibt sich $a_i x'^i = 0$ oder $a_j x''^j + b = 0$. Im letzteren Falle können wir das gegebene Integral in $\int c^{\frac{1}{p}}\,dt$ umformen. Dieses aber

---

1) E. Cartan, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, Journal de mathématiques pures et appliqués, **15** (1936), S. 42–69.

2) Siehe A. Kawaguchi, Die Geometrie des Integrals $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}}\,dt$, Proc. **12** (1936), S. 205–208.

3) a_i, b und c dürfen die Funktionen von x^i und x'^i sein.

4) H. V. Craig, American Journal of Mathematics, **57** (1935), S. 456–462.

5) Siehe A. Kawaguchi, Proc. **12** (1936), S. 149 oder H. V. Craig, a. a. O. S. 461.