106. *Sur les majorantes des fonctions CA.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'Institut Mathematique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Grâce à l'axiome du choix de M. E. Zermelo, M. N. Lusin[1] a démontré qu'il existe une fonction mesurable (L) qui est définie sur tous les nombres réels et qui ne peut être majorée par aucune fonction représentable analytiquement. Or, en appliquant la théorie des ensembles CA, on peut nommer tels fonctions, c.-à.-d.,

Théorème 1. Il existe une fonction CA[2] mesurable (L) (d'une variable réelle) qui ne peut être majorée par aucune fonction mesurable (B).

Démonstration. Prenons dans un espace $R(x, y, z)$, un ensemble analytique universel pour les ensembles analytiques plans, c.-à-d., un ensemble analytique M, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan $y=0$ on obtient tous les ensembles analytiques possibles. On sait alors[3] qu'il existe dans l'axe OY un ensemble complémentaire analytique Q ayant les propriétés suivantes: 1°, l'ensemble $U^*=M(OX \times Q \times OZ)$ est de la classe CA, 2°, quel que soit le point y_o de l'ensemble, Q, l'ensemble $M^{(y_o)}$ est l'image géométrique d'une fonction de Baire (d'une variable réelle), 3°, pour toute fonction de Baire (d'une variable réelle) $Z=\varphi(x)$, il existe un nombre réel y_o, tel que l'ensemble $M^{(y_o)}$ est précisément l'image géométrique de $Z=\varphi(x)$. Comme le complémentaire H de l'ensemble Q par rapport à l'axe OY est un ensemble analytique, il existe, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz, un ensemble élémentaire E dans le plan $R(y, z)$ dont la projection de ses points inféreurs sur l'axe OY est précisément H. Désignons par L l'ensemble de tous les points inférieurs de l'ensemble E. l'ensemble $U^{**}=L \times OX$ est alors un ensemble CA dans R.

La fonction CA $U(x, y)$ dont l'image géométrique est l'ensemble CA $U=U^*+U^{**}$ est universel pour toutes les fonctions de Baire (d'une variable réelle). Maintenant, nous démontrons que la fonction $U(x, x)$ satisfait aux conditions du théorème 1. Pour un nombre réel Z_o, considérons l'ensemble $F=\text{Ens}\,(U(x, y) > Z_o)$. Comme nous avons

$$F=Q\,\text{Proj}\,\{M(Z > Z_o)\}+\text{Proj}\,\{E(Z > Z_o)-\text{Proj}\,\{E(Z \leqq Z_o)\}^{4)},$$

l'ensemble F est de la classe $A\rho\sigma$.[5] Par conséquent, la fonction CA

---

1) W. Sierpiński: L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. Bulletin d. l'acad. d. Sc. d. Cracovie, Ser. A, (1918), 143.

2) Nous entendrons par la fonction CA d'une variable réelle celui qui donne l'ensemble CA comme l'image géométrique.

3) K. Kunugui: Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique, Proc. of the Imp. Acad. **12** (1936), 273-276.

4) Désignons par $M(Z < Z_0)$ l'ensemble de tous les points qui les coordonnées $Z > Z_0$.

5) Désignons par $A\rho\sigma$ la famille des ensembles qui peuvent être définis comme la somme d'une infinité dénombrable des ensembles $A\rho$.