

PAPERS COMMUNICATED

26. Einführung einer Metrik auf die Riemannsche Fläche und der Typus der Riemannschen Fläche.

Von Shizuo KAKUTANI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., April 12, 1937.)

1. Es sei F eine einfach zusammenhängende unendlich vielblättrige offene Riemannsche Fläche. Nach dem bekannten Satz der Funktionentheorie kann F eindeutig und, bis auf eventuelle innere Windungspunkte endlicher Ordnung, konform abgebildet werden entweder auf den Einheitskreis (hyperbolischer Fall) oder auf die punktierte Ebene (parabolischer Fall). Für das Eintreten des parabolischen Falles sind viele hinreichende Bedingungen von mehreren Autoren¹⁾ gegeben. Die Methode, mit deren Hilfe diese Bedingungen erhalten werden, ist aber dieselbe und die Idee davon, welche auf dem Begriffe der Metrik beruht, ist von L. Ahlfors explizit gegeben. Die Metrik von Ahlfors ist aber so allgemein, dass es nicht nutzlos scheint, einige spezielle Metrik eingehend zu untersuchen.

In der vorliegenden Note werde ich auf F eine Metrik einführen, derart, dass es auf F zwischen zwei Punkten eine und nur eine geodätische Linie gibt.

2. Der Einfachheit halber beschränke ich mich zunächst auf den Fall, wo es keine Windungspunkte auf F gibt. Es sei $f(w)$ eine auf F definierte reelle positive bis auf isolierte Punkte stetige Funktion, über die ich im Folgenden einige Ansprüche machen werde. Dann ist für jedes Paar w_1, w_2 von Punkten auf F die Entfernung $d(w_1, w_2)$ zwischen ihnen folgendermassen definiert:

$$d(w_1, w_2) = \text{U. G.} \int_K f(w) |dw|, \quad (1)$$

wo U. G. die untere Grenze für die sämtlichen w_1 und w_2 verbindenden rektifizierbaren Kurven K bedeutet.

Es sei ferner $f(w)$ so beschaffen, dass für jede den inneren Punkt w_0 mit dem Randpunkte w_1 verbindende (d. h. in F nicht endende) Kurve K die Relation

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \int_{w_0 K}^w f(w) |dw| = \infty$$

besteht. Dafür dass die untere Grenze (1) für eine und nur eine Kurve K erreicht wird, ist es hinreichend, dass $\log f(w)$ subharmonisch ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man z. B.

1) Vgl. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Springer, Berlin, 1936), Kapitel XII, § 3.

2) L. Ahlfors, *Sur le type d'une surface de Riemann*, *Comptes Rendus*, **201** (1935).