PAPERS COMMUNICATED

36. *Beweis eines Satzes in der Darstellungstheorie.*

Von Masaru OSIMA.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1937.)

Es sei K ein algebraisch-abgeschlossener Körper, $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe von der Ordnung g. Ist die Charakteristik von K gleich Null oder eine Primzahl, die in g nicht aufgeht, so ist die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$. In ihrer Arbeit[1] haben T. Nakayama und K. Shoda diesen wohlbekannten Satz folgendermassen verallgemeinert: Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, ist gleich der Anzahl der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Klassen der in $\mathfrak{G}$ konjugierten Elemente. Nach Anregung von K. Shoda untersuche ich im Folgenden den Fall, wo die Charakteristik p von K in g aufgeht, und ich erhalte den folgenden

Satz. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index zu p teilerfremd ist. Die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, ist gleich der Anzahl der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Klassen der in $\mathfrak{G}$ konjugierten Elemente, in denen die Ordnung der Elemente zu p teilerfremd ist.*

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index zu p teilerfremd ist, und

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{H}G_{t-1} \qquad t\not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$. Dann erhalten wir unmittelbar

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{h}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{h}G_{t-1},$$

wo $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ ist.

Hilfssatz 1. Ist $\mathfrak{n}$ das Radikal von $\mathfrak{h}$, so ist $\bar{\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{n}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{n}G_{t-1}$ das Radikal von $\mathfrak{g}$.

Beweis. $\bar{\mathfrak{n}}$ ist ersichtlich ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, und es gilt

$$\mathfrak{g}/\bar{\mathfrak{n}}\cong\mathfrak{h}/\mathfrak{n}+\mathfrak{h}/\mathfrak{n}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{h}/\mathfrak{n}G_{t-1}.$$

Daraus folgt $\bar{d}=(t^a d)^t\not\equiv 0$ (mod. p), wobei d, bzw. $\bar{d}$, die Diskriminante von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$ bezüglich der reduzierten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$, bzw. die Diskriminante von $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ bezüglich der durch $\mathfrak{D}$ induzierten Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ ist und a den Rang von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$ bedeutet.

Aus Hilfssatz 1 folgt

Hilfssatz 2. Die Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, sind vollständig reduzibel.

---

1) T. Nakayama und K. Shoda, Über die Darstellung einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journ. of Math. **12** (1936).