53. *Projektive Transformation eines Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung.*

Von Hitoshi HOMBU.

Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1937.)

In zwei Mannigfaltigkeiten liege je ein Kurvensystem. Wenn bei einer Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf die andere die Kurvensysteme einander überdecken, so wollen wir sagen, dass die Kurvensysteme projektiv verwandt sind.

1. Zunächst möchten wir die notwendige und hinreichende Bedingung finden dafür, dass in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zwei Systeme der verallgemeinerten "paths"[1] projektiv verwandt seien, welche durch Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^3x^i}{dt^3}+\Gamma^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}, \frac{d^2x^j}{dt^2}\right)=0 \quad \text{oder} \quad x^{(3)i}+\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^3x^i}{d\bar{t}^3}+\bar{\Gamma}^i\left(x^j, \frac{dx^j}{d\bar{t}}, \frac{d^2x^j}{d\bar{t}^2}\right)=0 \quad \text{oder} \quad x^{(\bar{3})i}+\bar{\Gamma}^i(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})=0$$

gegeben sind. Durch ein Linienelement zweiter Ordnung $(x, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ läuft eine und nur eine Integralkurve von (1) mit einem beliebigen Anfangswert von t, z. B. t_0. Ist diese auch eine Integralkurve von (2), so soll auf dieser Kurve mindestens eine Parametertransformation $t=t(\bar{t})$ existieren und bestehen

$$x^{(\bar{1})i}=x^{(1)i}\frac{dt}{d\bar{t}}\,, \qquad x^{(\bar{2})i}=x^{(2)i}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2+x^{(1)i}\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\,,$$

$$x^{(\bar{3})i}=x^{(3)i}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3+3x^{(2)i}\frac{dt}{d\bar{t}}\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}+x^{(1)i}\frac{d^3t}{d\bar{t}^3}\,,$$

somit ergibt sich nach (1) und (2)

$$\text{(3)} \qquad \bar{\Gamma}^i(x_0, \rho x_0^{(1)}, \rho^2x_0^{(2)}+\sigma x_0^{(1)})=\rho^3\Gamma^i(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})-3\rho\sigma x_0^{(2)i}-\omega x_0^{(1)i}$$

$$\left(\rho=\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)_{t=t_0}, \quad \sigma=\left(\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\right)_{t=t_0}, \quad \omega=\left(\frac{d^3t}{d\bar{t}^3}\right)_{t=t_0}\right);$$

ρ, σ und ω lassen sich durch $(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ bestimmen (nicht notwendig eindeutig). Da (3) für jede Integralkurve, also für jedes Linienelement

---

1) Über affine und intrinseke Theorien der verallgemeinerten "paths" vgl.: D. D. Kosambi, Path-spaces of higher order, Quart. J. of Math., Oxford Ser., **7** (1936); A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journal of the Faculty of Science, Hokk. Imp. Univ., Ser. I, **6** (1937).