104. Zur Bewertung der einfachen Algebren.

Von Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1937.)

Im folgenden bezeichnet A eine einfache Algebra mit P als Koeffizientenkörper, welcher seinerseits folgende Eigenschaften besitzt:

1. P ist der Quotientenkörper eines Integritätsbereiches R.
2. R ist ganz-abgeschlossen in P.
3. In R gilt der Teilerkettensatz für Ideale.
4. Alle vom Nullideal verschiedenen Primideale aus R sind teilerlos.
5. Das Zentrum von A ist separable über P.

Ist nun $\mathfrak{o}$ eine R enthaltende Maximalordnung von A/P, welche aus, bezüglich R, ganzen Elementen besteht, und $\mathfrak{a}$ eine Ideal aus $\mathfrak{o}$, so kann man nach Deuring eine Bewertung $|\ |_{\mathfrak{a}}$ von A/P herstellen.[1] Diese Deuringsche Bewertung hat folgende Beschaffenheiten:[2]

(A)
1. Die Bewertung ist nicht-archimedisch.
2. Die Bewertungen aller Elemente aus $\mathfrak{o}$ sind nicht grösser als 1.
3. Die Bewertung ist nicht-trivial und diskret. d. h. es gibt in A mindestens ein von der Null verschiedenes Element, dessen Bewertung kleiner ist als 1, und ferner existiert eine positive Zahl $C<1$ von der Art, dass die Bewertung eines Elementes aus A entweder $\geqq 1$ oder $<C$ ist.

Es fragt sich nun, ob *eine Bewertung von A/P unter der Bedingung* (A) *stets einer Deuringschen Bewertung äquivalent ist.*

In der vorliegenden Note will ich diese Frage durch folgenden Satz beantworten:

Satz. *Es sei φ eine Bewertung von A/P unter der Bedingung* (A). *Dann bildet die Gesamtheit $\mathfrak{a}$ aller derjenigen Elemente aus $\mathfrak{o}$, deren Bewertungen kleiner sind als 1, ein gleichseitiges Ideal*[3] *aus $\mathfrak{o}$. Ferner ist φ der durch $\mathfrak{a}$ bestimmten, Deuringschen Bewertung $|\ |_{\mathfrak{a}}$ äquivalent.*

Zum Beweis will ich einige Vorbemerkungen und Hilfssätze vorausschicken.

Vorbemerkung 1. Nach einem bekannten Wedderburnschen Struktursatz[4] kann man A als ein direktes Produkt einer Divisionsalgebra $\mathfrak{D}$ mit einer Matrixalgebra $\mathfrak{M}$ über P als Koeffizientenkörper annehmen: $A=\mathfrak{D}\times\mathfrak{M}$. Multipliziert man jede Matrixeinheit e_{ij} aus $\mathfrak{M}$ mit einem passend gewählten Element γ aus R, so gehört $e^*_{ij}=\gamma e_{ij}$ zu $\mathfrak{o}$.

---

1) M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin (1935), S. 93–95. Die Deuringsche Bewertung kann nur in einfache Algebren eingeführt werden, aber nicht mehr in halb-einfache Algebren.

2) Deuring, loc. cit., S. 94–95.

3) Da wir bloss gleichseititige Ideale betrachten, so lassen wir später das Wort „gleichseitig" weg und sprechen schlechthin von einem Ideal.

4) Vgl. etwa Deuring, loc. cit., S, 18–19.