PAPERS COMMUNICATED

42. *Sur la multivalence d'une famille des fonctions analytiques.*

Par Akira KOBORI.
Niigata Higher School.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., May 12, 1938.)

Nous désignerons par F_k l'ensemble des fonctions analytiques $f(z)$, $f(0) \neq 0$, qui vérifient la relation

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > -k, \qquad k: \text{un entier positif,}$$

dans le cercle $|z| < R$. D'après un lemme d'une note précédente, l'on peut conclure que les fonctions de notre famille n'ont ni zéros ni pôles dans ce cercle, c'est-à-dire elles sont régulières dans $|z| < R$.[1]

Puisque

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg \{f(z)\},$$

on a, sur la circonférence $|z| = r$ $(r < R)$,

$$\frac{d}{dz} \log f(z) \cdot \frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \log |f(z)| + i \frac{d}{d\theta} \arg \{f(z)\},$$

donc

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{d}{d\theta} \arg \{f(z)\} - i \frac{d}{d\theta} \log |f(z)|$$

et

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{d}{d\theta} \arg \{f(z)\}.$$

Pour la fonction $z^k f(z)$, où la fonction $f(z)$ est une fonction de la famille F_k, l'on a sur la circonférence $|z| = r$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \arg \{z^k f(z)\} &= \frac{d}{d\theta} \left[k\theta + \arg \{f(z)\}\right] \\ &= k + \frac{d}{d\theta} \arg \{f(z)\} \\ &= k + \Re \frac{zf'(z)}{f(z)} \\ &> k - k = 0.\end{aligned}$$

---

1) Voir le lemme de mon mémoire „Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet." (Memoirs, College of Science, Kyoto imp. University, Ser. A. XV, 1932). Dans ce mémoire j'ai démontré que les fonctions de F_k sont différentes de zéro pour $|z| < R$, mais on peut de la même manière démontrer qu'elles n'ont pas pôles dans ce cercle.