PAPERS COMMUNICATED

1. *Ein Beweis der Invarianz der Bettischen Gruppen bei Unterteilung der Komplexe.*

Von Shôkichi IYANAGA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1939.)

Es seien K ein Euklidischer Komplex, $K_1=\upsilon(K)$ eine Unterteilung von K. Beliebige Koeffizientenbereiche $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ seien zugrundegelegt. Die Gruppen der algebraischen Komplexe, der Zyklen, der berandenden Zyklen von K bzw. K_1 bezeichnen wir wie üblich[1] mit L, Z, H bzw. L_1, Z_1, H_1. Im folgenden geben wir einen einfachen Beweis dafür, dass die beiden Bettischen Gruppen $B=Z/H$ und $B_1=Z_1/H_1$ zueinander isomorph sind.

Die durch υ bewirkte Unterteilung des algebraischen Komplexes C von K bezeichnen wir mit $\upsilon(C)$. Somit wird υ als ein Operator auf die Gruppe L aufgefasst; er ist linear und bekanntlich mit der Randbildung vertauschbar,[2] und bildet L, Z, H bzw. isomorph in L_1, Z_1, H_1 ab: $L\cong\upsilon(L)\subset L_1$, $Z\cong\upsilon(Z)\subset Z_1$, $H\cong\upsilon(H)\subset H_1$. Mithin gilt $B\cong\upsilon(Z)/\upsilon(H)$. Zum Beweis der Isomorphie $B\cong B_1$ genügt es also zu zeigen 1) $\upsilon(H)=\upsilon(Z)\frown H_1$, und 2) $Z_1=\upsilon(Z)\smile H_1$. Diese folgen nun aus zwei Hilfssätzen, von denen der erste übrigens eine längst (im wesentlichen) bekannte Tatsache ist.

1. Die Simplexe von K bezeichnen wir allgemein mit x_ν. L_ν sei die vom x_ν erzeugte (zu $\mathfrak{J}$ isomorphe) Untergruppe von L. Die L_ν bilden direkte Summanden von $L: L=\sum_\nu L_\nu$. Die Dimensionen der Simplexe, Komplexe usw. deuten wir wie üblich durch obere Indizes an. L^r sei also die Gruppe der r-dimensionalen algebraischen Komplexe. Es gilt ebenfalls $L=\sum_r L^r$.

Hilfssatz 1. *Es sei φ ein linearer, mit der Randbildung vertauschbarer Operator auf L, sodass $\varphi(L)\subset L$, und zwar* 1) $\varphi(L_\nu)\subset L_\nu$ $\big($*also* $\varphi(L^r)\subset L^r\big)$, *und* 2) $\varphi(L^0)=0$. *Dann gilt* $\varphi(L)=0$.

Dies ist der bekannte Schluss, mit dem man den „3. Erhaltungssatz"[3] zu beweisen pflegt.[4] Der Beweis geschieht (in bekannter Weise) durch vollständige Induktion in bezug auf die Dimension sehr einfach

---

1) Vgl. P. Alexandroff und H. Hopf: Topologie I, Berlin, 1935. Im folgenden mit A-H zitiert. Wegen der Bezeichnungen und der Terminologie befolgen wir (bis auf manche kleinen Abweichungen)' den Gebrauch in diesem Buch. Der folgende Beweis wird als Vorbereitung zum Invarianzbeweis im Kap. IX von diesem Buch besonders geeignet sein.

2) A-H Kap. VI § 2, 2. S. 255.

3) A-H Kap. IX § 1, 1 Satz 2. S. 340.

4) Wir verwenden ihn übrigen auch zum selben Zweck, und für das folgende ist nur das Korollar 1 (=3. Erhaltungssatz) massgebend. Wir baben jedoch den Hilfssatz so formuliert, um die formale Analogie mit dem Hilfssatz 2 hervorzuheben.