34. Über die Eindeutigkeit der Artinschen L-Funktionen.

Von Hideo ARAMATA.
Daiichi Kotogakko, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1939.)

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper und K ein galoissche Erweiterung von k. In der vorliegenden Note denken wir uns den Fall, dass die Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k die sogen. Kongruenzgruppe von der Primzahlstufe p ist.[1] Die Charaktere dieser Gruppe $\mathfrak{G}$ hat schon Frobenius hergeleitet,[2] so dass wir uns im folgenden der Frobeniusschen Bezeichungen bedienen.

1) Der durch einen abelschen Charakter ψ_i^τ von der durch ein Element τ aus $\mathfrak{G}$ erzeugten Untergruppe induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$ hat bekantlich die Gestalt:

$$\chi_{\psi_i^\tau}(\rho)=\frac{g}{q_\tau n_\rho}\sum{}' \psi_i(\tau^a),$$

wobei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, q_τ dieselbe von τ, und n_ρ die Anzahl der zu ρ konjugieten Elemente aus $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Die Summe erstrekt dabei über solche a, dass τ^a in der ρ-Klasse, d. h. derjenigen Klasse von $\mathfrak{G}$, die ρ enthält, auftreten.

2) Für die Kongruenzgrüppe $\mathfrak{G}$ von der Primzahlstufe p gelten:

$$g=\frac{1}{2}p(p^2-1),\quad q_P=q_Q=p,\quad q_R=\frac{1}{2}(p-1),$$

$$q_S=\frac{1}{2}(p+1),\quad n_P=n_Q=\frac{p^2-1}{2},\quad n_R=\frac{p(p+1)}{2},$$

$$n_S=\frac{p(p+1)}{2}.$$

3) Wenn a ein quadratischer Rest mod p und b ein Nichtrest mod p ist, so ist P^a zu P konjugiert; ebenso Q^a zu Q konjugiert.

4) Unter den Potenzen von R sind je zwei mit entgegengesetzten Exponenten R^a und R^{-a} (und nur diese) konjugiert; ebenso unter den Potenzen von S.

Aus 4) ergibt sich sofort

$$(1)\qquad \chi_{\psi_i^R}(\rho)=\chi_{\bar\psi_i^R}(\rho),\quad \chi_{\psi_i^S}(\rho)=\chi_{\bar\psi_i^S}(\rho),\quad \text{wenn}\quad \bar\psi_i=\psi_i^{-1}\quad \text{ist.}$$

Aus 1), 2) und 4) ergibt sich ferner

---

1) Vgl. E. Artin, „Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper," Math. Annalen **89** (1923), 147-156.

2) G. Frobenius, „Über Gruppencharaktere," Berliner Sitzungsberichte, 1896, 985-1021.