46. *Sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques.*

Par Masao INOUE.

Institut Mathématique, Université Impériale d'Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., June 12, 1939.)

Dans cette Note nous démontrons d'abord que chaque fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné de classe (P) qui sera tout à l'heure définie peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions harmoniques, uniformément convergente sur cet ensemble, puis des théorèmes qui en résultent. Enfin, à l'aide d'un théorème obtenu, nous faisons une légère généralisation du théorème de Leja et d'un théorème que j'ai établi antérieurement.

1. Considérons dans le plan un ensemble F fermé et borné. On dira que F est de classe (P) s'il existe une constante positive d et une suite de domaines réguliers pour le problème de Dirichlet $\{D_n\}$ (uniformément bornés) telles que

1°. F soit contenu dans tout D_n;

2°. pour chaque point z de F, on puisse trouver une suite de points frontières z_n (de D_n) tendant vers z de manière à avoir:

(α) $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un nombre naturel N indépendant de z tel que l'on ait

$$|z-z_n| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n > N;$$

$$(\beta) \qquad \mathfrak{P}_{D_n, z_n} \supset [0, d] \quad (n=1, 2, \dots),$$

où $\mathfrak{P}_{D_n, z_n}$ désigne la projection circulaire de D_n ayant z_n comme centre.[1]

On a alors le théorème suivant:

Théorème 1. Toute fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné de classe (P) peut être uniformément approchée par une suite de fonctions harmoniques sur cet ensemble.

Démonstration. Soit F un ensemble fermé et borné de classe (P), et soit donnée une fonction réelle $f(z)$ continue sur F. Prolongeons d'abord $f(z)$ continûment au delà de F jusqu'au plan entier et désignons ce prolongement continu par la même lettre f.

Etant donné $\varepsilon > 0$ à l'avance, déterminons un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait, quelque soit $z^* \in F$,

$$|f(z)-f(z')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z^*-z| < 2\delta, \quad |z^*-z'| < \delta,$$

ce qui est possible car F est fermé et borné.

Puisque F est de classe (P), on peut trouver d'après définition une

---

1) C'est-à-dire, l'ensemble de points de l'axis positif réel que parcourt le module $|z-z_n|$ lorsque z parcourt l'ensemble de points du plus petit cercle renfermant D_n, n'appartenant pas à D_n.