45. *Eine Bemerkung zur Dimensionstheorie.*

Von Kunihiko KODAIRA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1939.)

Man definiert die Dimensionszahl von einem Kompaktum F bekanntlich auf zweierlei Weise: Nach Lebesgue-Brouwer wird sie nämlich als die kleinste nicht-negative ganze Zahl n definiert, sodass F beliebig feine Überdeckung mit der Ordnung $n+1$ besitzt. Die Dimension von F in diesem Sinne wollen wir mit $\dim F$ bezeichnen. Andererseits heisst F nach Urysohn-Menger höchstens n-dimensional, wenn jeder Punkt p von F in einer beliebig kleinen Umgebung $U(p)$ enthalten ist, deren Rand $\overline{U(p)}-U(p)$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist; die Dimension von F wird hier somit rekursiv definiert, indem als Dimension der leeren Menge die Zahl -1 zugeschrieben wird. Die beiden Definitionen sind bekantlich äquivalent falls $\dim F<\infty$ ist.[1] Im folgenden soll dafür ein einfacher Beweis mitgeteilt werden, der sich allein auf elementareren Teil der Alexandroffschen Dimensionstheorie stützt.[2]

Wir beginnen mit dem

Hilfssatz. Es sei F ein Kompaktum und $\dim F=n$. $(K_1^n, \dots, K_m^n, \dots)$ *sei ein n-dimensionales Projektionsspektrum von F, und* $(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_m, \dots)$ *die entsprechende Folge von Unterteilungen von F. $\mathfrak{U}_m$ ist also eine abgeschlossene Überdeckung von F. Die Elemente von $\mathfrak{U}_m$ bezeichnen wir mit F_m (nötigenfalls mit oberen Indizes versehen). Dann gilt*

$$\dim F_m^{(0)}F_m^{(1)}\dots F_m^{(r)}\leqq n-r\,.$$

Beweis. $l(>m)$ sei fest gewählt. Da $\mathfrak{U}_l$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}_m$ ist, ist dann $F_m^{(j)}$ die Summe gewisser Elemente $F_l^{(jk)}$ von $\mathfrak{U}_l$:

$$F_m^{(j)}=\sum_k F_l^{(jk)}\,.$$

Setzen wir nun

$$F^{(k)}=F_l^{(0k)}F_m^{(1)}F_m^{(2)}\dots F_m^{(r)},$$

dann bildet offenbar $\{F^{(k)}\}$ eine abgeschlossene Überdeckung von $F_m^{(0)}F_m^{(1)}\dots F_m^{(r)}$. Um die Ordnung dieser Überdeckung abzuschätzen, setzen wir voraus, dass

$$F^{(1)}F^{(2)}\dots F^{(\nu)}\neq 0$$

sei, und bezeichnen mit p einen Punkt aus $F^{(1)}F^{(2)}\dots F^{(\nu)}$. Da $F_m^{(j)}$ $(j=1, 2, \dots r)$ den Punkt p enthält, so gibt es für jedes j mindestens ein $F_l^{(jh_j)}$ mit

$$F_l^{(jh_j)}\ni p\,.$$

---

1) Siehe z. B. Menger: Dimensionstheorie, S. 155. Freudenthal, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. (Compositio Math. 4 (1937), S. 228–231).

2) Vgl. Alexandroff, Dimensionstheorie. (Math. Ann. Bd. 106, S. 161.)