51. *Sur une Extension de la Théorie des Fonctions de Baire.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1939.)

La théorie de M. H. Lebesgue sur les fonctions de Baire vient de discuter la relation entre les fonctions de Baire et les ensembles mesurables (B), et le théorème fondamentàle de celle-là est le

Théorème. *Pour qu'une fonction f partout définie soit de classe α, il faut et il suffit que, quel que soient a et b, l'ensemble $E(a \leqq f \leqq b)$ soit de classe α au plus, et qu'il soit effectivement de classe α pour certaines valeurs de a et b.*[1]

Cependant, cette méthode de M. H. Lebesgue serait aussi très utile dans la théorie des opérations analytiques des fonctions. Nous verrons dans la suite comment cette méthode est utile dans celle-là.[2]

Pour ce but, il nous faut d'abord voir la relation entre les opérations analytiques des fonctions et les opérations analytiques des ensembles. Quand une opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ des fonctions est donnée sur un espace métrique R, il existe, d'après le théorème 7 de O. A., pour tout nombre réel a une opération analytique $\Psi^{(a)}(E_n)$ des ensembles telle qu'on ait

$$\Psi^{(a)}\big(\mathfrak{F}(R)\big) = \mathrm{Ens}\Big(\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) \geqq a\Big).$$

Nous pouvons ici distinguer les deux cas, l'un est que l'opération $\Psi^{(a)}(E_n)$ ne dépend pas du nombre réel a et l'autre est ce qui n'est pas le premier cas. Nous dirons dans le cas premier que l'opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ des fonctions est homogène latéralement, et que les opérations $\Phi\big(F_n(x)\big)$ et $\Psi^{(a)}(E_n)$ sont adjointes l'une l'autre.

Maintenant, nous supposons que l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ soit homogène latéralement. Or, nous ne pouvons conclure dans ce cas que les fonctions de la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ sont déterminées par son opération adjointe des ensembles, c'est-à-dire, une fonction $F(x)$, telle qu'on ait $\mathrm{Ens}\big(F(x) \geqq a\big) \in \Psi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ pour tout nombre réel a, appartient à la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$. Maintenant, nous considérons toutes les opérations analytiques des fonctions adjointes à l'opération $\Psi(E_n)$ et nous prenons la famille $\mathfrak{F}(\Psi)$ de toutes les fonctions obtenues en appliquant ces opérations sur les fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$. Nous pouvons ici

1) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. Journal de Mathématiques, s. 6, t. **1** (1905).

2) Pour les définitions et notations, voir ma note précédente, Sur les opérations analytiques des fonctions. Nous désignons par O. A. cette note dans la suite.