73. Über Ringe mit Vielfachenkettensatz.

Von Keizô ASANO.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1939.)

In einem Schiefring $\mathfrak{o}$ mit dem Vielfachenkettensatz für Linksideale gilt,[1] dass

1. das maximale zweiseitige Nilideal[2] $\mathfrak{c}$ nilpotent ist,
2. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ halbeinfach ist,
3. jeder Teilring von $\mathfrak{o}$, der aus lauter nilpotenten Elementen besteht, selbst nilpotent ist.

In § 1 der vorliegenden Note beweisen wir, dass unter der Voraussetzung des Vielfachenkettensatzes für zweiseitige Ideale und des Veilfachenkettensatzes für Linksideale modulo jedem Primideal auch der Satz gilt.[3] Im kommutativen Ring mit Nichtnullteilern ist bekannt,[4] dass der Teilerkettensatz für Ideale aus dem eingeschränkten Veilfachenkettensatz folgt. Wir beweisen in § 2, dass im Schiefring mit Nichtnullteilern der Teilerkettensatz für Linksideale aus dem Vielfachenkettensatz für Linksideale folgt.[5] Wir beweisen ferner in § 3, dass der Kettensatz für Linksideale und der Kettensatz für Rechtsideale unabhängig sind.

§ 1. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schiefring und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ seien zweiseitige Ideale von $\mathfrak{o}$. Unter dem rechts- bzw. linksseitigen Idealquotienten $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r$ bzw. $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l$ verstehen wir die Gesamtheit der Elemente c von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{b}c \leqq \mathfrak{a}$ bzw. $c\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$. Der Idealquotient ist ersichtlich ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$ und es gilt

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \geqq \mathfrak{a}\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l \geqq \mathfrak{a}\,,$$
$$\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \leqq \mathfrak{a}\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}\,,$$
$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r = \big(\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)_r\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l = \big(\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\big)_l\,,$$
$$\big((\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r:\mathfrak{c}\big)_r = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})_r\,, \qquad \big((\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l:\mathfrak{c}\big)_l = (\mathfrak{a}:\mathfrak{c}\mathfrak{b})_l\,,$$
$$\text{Aus } \mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c} \text{ folgt } (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_r \leqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_r\,, \qquad (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_l \leqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_l\,.$$

Ein (von $\mathfrak{o}$ verschiedenes) zweiseitiges Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ heisst Primideal, wenn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}$ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}$ folgt, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zweiseitige Ideale

---

1) C. Hopkins, Nilrings with minimal condition for admissible left ideals. Duke math. J. **4** (1939), S. 664–667.

2) D. h. aus lauter nilpotenten Elementen bestehendes Ideal.

3) Diesen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Y. Akizuki.

4) S. Mori, Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz. J. of science of Hiroshima Univ. **3**, S. 277–296. Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz. Proc. Physico-math. Soc. of Japan. **17** (1935), S. 337–345.

5) Im speziellen Fall folgt der Teilerkettensatz für Linksideale aus dem eingeschränkten Vielfachenkettensatz für Linksideale. Es ist aber dem Verfasser nicht gelungen zu entscheiden, ob dies im allgemeinen der Fall ist.