40. Über zusammenhängende kompakte abelsche Gruppen.

Von Kunihiko KODAIRA und Makoto ABE.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A. May 13, 1940.)

Jede zusammenhängende (nicht notwendig lokal-zusammenhängende) kompakte separable abelsche Gruppe[1] läßt sich, wie es w. u. (Nr. 4) gezeigt werden soll, als Limesgruppe einer G_n-adischen Folge von (endlich-dimensionalen) Torusgruppen auffassen. Diese letzten Gruppen haben folgende Eigenschaften, die wegen ihrer einfachen (topologischen bzw. algebraischen) Struktur leicht nachzuweisen sind (Nr. 1–3):

Es seien $\mathfrak{T}$, $\tilde{\mathfrak{T}}$ zwei endlich-dimensionale Torusgruppen und $\mathfrak{R}$ die additive Gruppe der mod. 1 reduzierten reellen Zahlen; dann gelten:

a) $\mathfrak{T}$ ist mit $B^1_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{T})$[2] topologisch isomorph.

b) Für jede stetige Abbildung f von $\mathfrak{T}$ in $\tilde{\mathfrak{T}}$ gibt es einen und nur einen stetigen Homomorphismus h_f von $\mathfrak{T}$ in $\tilde{\mathfrak{T}}$, der zu f homotop ist.

c) Die Abbildungsklasse einer stetigen Abbildung f von einem Kompaktum F in $\mathfrak{T}$ ist durch den von f induzierten stetigen Homomorphismus H_f von $B^1_{\mathfrak{R}}(F)$ in $B^1_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{T})\cong\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}$-Charakter H_f von $B^1_{\mathfrak{R}}(F)$) eindeutig bestimmt.

Nun ist zu vermuten, daß diese Behauptungen noch gültig bleiben, wenn man darin die Torusgruppen durch beliebige zusammenhängende kompakte separable abelsche Gruppen, d. h. durch G_n-adische Limesgruppen von Torusgruppen ersetzt. Wir bestätigen im Folgenden, daß dies tatsächlich der Fall ist (Nr. 5–8, Sätze 1–3). Schließlich beweisen wir einen Satz (Satz 4, Nr. 9), daß die n-dimensionale Torusgruppe die einzige n-dimensionale zusammenhängende kompakte separable abelsche Gruppe ist, die sich im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum topologisch einbetten läßt.[3]

1. *Isomorphie von $\mathfrak{T}$ und $B^1_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{T})$.*

Die n-dimensionale Torusgruppe $\mathfrak{T}$ ist die direkte Summe der n Exemplare von $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{T}=\underbrace{\mathfrak{R}+\mathfrak{R}+\cdots+\mathfrak{R}}_{n\text{-mal}}.$$

Jedes Element von $\mathfrak{T}$ läßt sich also in der Form

$$\tau=\tau(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad x_i\in\mathfrak{R}$$

darstellen. x_i heiße die i-te Koordinate von $\tau\in\mathfrak{T}$. Die Elemente von

1) Alle vorkommenden Gruppen sind abelsch und additiv geschrieben.

2) Die 1-dimensionale Bettische Gruppe von $\mathfrak{T}$ in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$.

3) Die Sätze 1 und 4 in dieser Note sind schon früher von einem der Verfasser (Kodaira) erhalten und in japanisch veröffentlicht worden [Isô-Sûgaku, Vol. 1, No. 2, 1939].