

39. Über die Differenzierbarkeit der einparametrischen Untergruppe Liescher Gruppen.

Von Kunihiko KODAIRA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 13, 1940.)

Im Folgenden soll ein einfacher Beweis für den bekannten Satz¹⁾ gegeben werden, dass jede stetige einparametrische Untergruppe einer Lieschen Gruppe differenzierbar (in bezug auf den Parameter) ist.

Es sei \mathfrak{G} eine n -parametrische Liesche Gruppe. Die Elemente von \mathfrak{G} bezeichnen wir mit x, y, \dots ; ihre Koordinaten mit x^j, y^j, \dots ($j=1, 2, \dots, n$). Dem Einselement e von \mathfrak{G} soll wie üblich der Koordinatenanfang $(0, \dots, 0)$ entsprechen.

$f^j(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n) = f^j(x, y) = (xy)^j$ sei die Funktion, die die j -te Koordinate des Produktes xy angibt. f^j ist also stetig differenzierbar in bezug auf $(x, y) = (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$.

Wir setzen nun

$$g_k^j(x, y) = \frac{1}{x^k} \{ f^j(0, \dots, 0, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n; y) - f^j(0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n; y) \},$$

sodass die Identität:

$$(1) \quad f^j(x, y) - y^j = \sum_{k=1}^n x^k g_k^j(x, y)$$

besteht. g_k^j ist stetig, also auch gleichmässig stetig in (x, y) , weil $g_k^j(x, y) = \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(0, \dots, 0, \theta x^k, x^{k+1}, \dots, x^n; y)$, $0 \leq \theta \leq 1$, und $\frac{\partial f^j}{\partial x^k}$ stetig ist. Ferner ist offenbar $g_k^j(x, e) = \delta_k^j$. Für $y \rightarrow e$ strebt also $g_k^j(x, y)$ gleichmässig nach δ_k^j .

Nun sei $x(t)$ ($-t_0 < t < t_0$) eine stetige, einparametrische Untergruppe von \mathfrak{G} : $x(t+s) = x(t)x(s)$. Zu zeigen ist, dass die Funktion $x^j(t)$ in t differenzierbar ist. Dabei genügt es offenbar, diese Differenzierbarkeit an der Stelle $t=0$, also die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^j(t)}{t}$ nachzuweisen, denn es ist $x^j(t+s) = f^j(x(t), x(s))$ und f^j ist differenzierbar.

Aus (1) folgt nun

$$x^j(t+s) - x^j(s) = \sum_{k=1}^n x^k(t) g_k^j(x(t), x(s)).$$

Integriert man die beiden Seiten in bezug auf s von 0 bis ε , erhält man

$$\int_0^\varepsilon x^j(t+s) ds - \int_0^\varepsilon x^j(s) ds = \sum_{k=1}^n x^k(t) \int_0^\varepsilon g_k^j(x(t), x(s)) ds.$$

1) Siehe z. B. Pontrjagin: Topological groups, Chapter VI, § 39, Theorem 48.