62. *Sur les projections dans certains espaces du type (B).*

Par Hitosi KOMATUZAKI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1940.)

M. S. Banach[1] a posé le problème suivant: existe-t-il dans un espace H donné du type (B) pour tout sous-ensemble linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de l'espace H sous-ensemble linéaire fermé $\mathfrak{N}$ tel que tout élément f de l'espace H se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f=g+h$ où $g\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{N}$? Ce problème été résolu affirmativement pour l'espace $(L^{(2)})$ et négativement pour les espaces (L), (l), $(L^{(p)})$ $2\neq p>1$ et $(l^{(p)})$ $2\neq p>1$.[2] Dans cette note, nous démontrerons qu'il est résolu négativement pour les espaces (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ où $p=1, 2, \dots$ et (c_0).

1. Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ de toutes les fonctions $x_r(t)$ définies comme il suit:

$$(1)\qquad x_r(t)\begin{cases} =r_i & \text{pour } \dfrac{i-1}{m}\leqq t<\dfrac{i}{m} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \\ =r_m & \text{pour } \dfrac{m-1}{m}\leqq t\leqq 1, \end{cases}$$

où r_i et r_m sont des nombres rationnels arbitraires et m est un nombre naturel quelconque. A toute couple ordonnée x, y des fonctions de cet ensemble, nous faisons correspondre un nombre, dit distance entre x et y:

$$(2)\qquad (x, y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|.$$

Cet ensemble $\mathfrak{F}$ devient alors un espace métrique. Nous désignons maintenant par (C^*) l'espace obtenu en complétant celui-ci par cette métrique. Tout élément de l'espace (C^*) est donné comme la limite d'une suite convergente uniformément des fonctions de $\mathfrak{F}$ définies dans l'intervalle $0\leqq t\leqq 1$. L'ensemble $\mathfrak{F}$ étant dénombrable, l'espace (C^*) est séparable, et complet par définition même. De plus, la définie par l'égalité (2) montre bien que pour que un espace (C^*) est de type (B). Toute fonction continue définie dans l'intervelle $0\leqq t\leqq 1$ peut être approchée uniformément par les fonctions de $\mathfrak{F}$ et, par suite, appartient à l'espace (C^*). Or, comme la métrique définie par l'égalité (2) est identique à celle de l'espace (C), nous pouvons dire que l'espace (C) est contenu parfaitement dans l'espace (C^*).

Rappelons quelques définitions sur les notions que nous employerons plusieurs fois dans la suite. L'opération linéaire bornée E telle que $EH=\mathfrak{M}$ et $E^2=E$ est appelée la projection de l'espace H sur le sous-espace $\mathfrak{M}$. $H\simeq H'$ désigne que l'espace H est équivalent[3] à l'espace

1) Cf. S. Banach; Théorie des opérations liéaires: Warszawa. 1932. p. 244-245.

2) Cf. F. J. Murray; On complementary manifolds and projections in spaces (L_p) and (l_p). Trans. Amer. M. S. 41. (1939).

3) Cf. loc. cit. 1). p. 180. § 6.