# 77. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien.*[1]

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

**1.** *Einleitung.* Neuerdings[1] habe ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien veröffentlicht. Im folgenden möchte ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen (d. h. gewöhnlichen) Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien mitteilen.

**2.** *Elliptische Laguerresche, hyperbolische Laguerresche und parabolische Laguerresche Geometrie in der Ebene.* Verwandelt man die Gleichung

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2\,, \qquad (\varepsilon=\pm 1)\,, \tag{1}$$

| | | |
|---|---|---|
| $(m=i,\ i^2=-1)$ | $(m=h,\ h^2=+1)$ | $\left(m=p,\ p^2=0,\ -bp^2=2d=\text{endlich},\ \sqrt{\varepsilon}\, r=p\sqrt{b(2b'-b)}\right)$ |
| eines Kreises | einer Hyperbel | einer Parabel |

in Tangentialgleichung, so erhält man

$$\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\, r}a-m^2\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\, r}b-P=\sqrt{\varepsilon}\, r\,. \tag{2}$$

Setzt man

$$\mathfrak{u}_1=\frac{e^{m\varphi}+e^{-m\varphi}}{2}=\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\, r}\,, \qquad \mathfrak{u}_2=-im\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\, r}=-im\frac{e^{m\varphi}-e^{-m\varphi}}{2^m}\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{u}_3=i\,, \qquad \mathfrak{u}_4=-P=-\frac{x-a}{\sqrt{\varepsilon}\, r}a+\frac{y-b}{\sqrt{\varepsilon}\, r}m^2b+\sqrt{\varepsilon}\, r\,,$$

d. h.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathfrak{u}_1=\cos\varphi\,,$ | $\mathfrak{u}_1=\cosh\varphi\,,$ | $\mathfrak{u}_1=\operatorname{cosp}\varphi\,,$ |
| $\mathfrak{u}_2=\sin\varphi\,,$ | $\mathfrak{u}_2=-ih\sinh\varphi$[3], | $\mathfrak{u}_2=-ip\operatorname{sinp}\varphi\,,$ |

und

(4)[4] $\qquad \xi_1=a\,, \quad \xi_2=-imb\,, \quad \xi_3=i\sqrt{\varepsilon}\, r\,, \quad \xi_4=1\,,$

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Dieses „Proc.", S. 333, Abhandlung 75.

3) Diese Bezeichnungsweise weicht von der gewöhnlichen hyperbolischen Kosinus und der gewöhnlichen hyperbolischen Sinus teilweise ab.

4) Im Falle $m=p$ $\left((x-a)^2=4d(y-b')\right)$ ist: $2d=-p^2b$, $\sqrt{\varepsilon}\, r=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $\varepsilon=+1$; $\xi_1=a$, $\xi_2=\frac{2id}{p}$, $\xi_3=-2\sqrt{d}\sqrt{b'+\frac{d}{p^2}}$, $\xi_4=1$.