75. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien.*[1]

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. *Einleitung.* Ziemlich viele Geometer haben versucht die tetrazyklischen und pentasphärischen Koordinaten zum Falle der allgemeinen Kegelschnitte und Konikoide zu verallgemeinern, aber bis jetzt ohne Erfolg. Die sogenannte Batemansche Gruppe,[2] welche aus den homographischen Transformationen der hyperbolischen komplexen Zahlen $z=x+hy$, $(h^2=+1)$ besteht, ist bekannt, aber ohne das räumliche Gegenstück. Im folgenden möchte ich die drei Fälle der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Geometrien gemeinsam behandeln. Die Analoga zur Laquerreschen und Lieschen Geometrie möchte ich gleich begründen. Unsre Geometrien erwähnen uns, dass die Entwickelung der Funktionentheorien der hyperbolischen komplexen und parabolischen komplexen Veränderlichen auch wünschenswert ist. Unser Hauptzweck besteht in den Ergebnissen aus den Differentialgeometrien.

2. *Elliptische, hyperbolische und parabolische komplexe Zahlen.* Der folgende Satz[3] ist bekannt: Ist P ein (kommutativer) Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, so gibt es nur die folgenden drei Typen von hyperkomplexen Systemen vom Range 2 mit Einselement (alle kommutativ):

a) $(1, c)$, wo c^2 in P liegt und dort kein Quadrat ist. Das System ist ein kommutativer Körper über P.	b) $(1, j)$, wo j^2 das Quadrat eines von Null verschiedenen Elementes k von P ist. Das System ist die direkte Summe zweier Körper $(j-k)\,\mathbf{P}=\mathbf{P}_1$ und $(j+k)\mathbf{P}=\mathbf{P}_2$, die beide isomorph zu P sind und sich gegenseitig annullieren: $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=(0)$.	c) $(1, l)$, wo $l^2=0$ ist. („System der dualen Zahlen.“)

Ist P insbesondere ein Zahlkörper, so ist die Charakteristik gleich Null[4] und gilt der obige Satz.

Im Falle, dass P der Körper der reellen Zahlen ist, und dass

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Siehe G. Kowalewski, Allgemeine Natürliche Geometrie (1931), S. 246. Herr J. Maeda hat mir mitgeteilt, dass er daran anschliessend, unabhängig von mir die drei Fälle $z=x+my$, ((i) $m^2=-k^2$, (ii) $m^2=+k^2$, (iii) $m^2\equiv 0$; k^2: positive Konstante) *gegenüber* den Kegelschnitten $A(x^2+m^2y^2)+2Bx+2Cy+D=0$ schon im lezten Juni von einem anderen Gesichtspunkte aus bemerkt hatte.

3) B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, II (1931), S. 150.

4) „ , I (1930), S. 87, Linie 25. Einer von $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ besteht aus den Nullteilern.