73. Die Grundlegung der Geometrie der n-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des K-dimensionalen Flächeninhalts.

Von Akitsugu KAWAGUCHI und Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

In einer vorhergehenden Arbeit haben wir die geometrische Theorie der fünf-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts entwickelt[1]. In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns weitergehend eine geometrische Theorie der n-dimensionalen metrischen Räume mit Hilfe des Begriffs des K-dimensionalen Flächeninhalts, jedoch unter einer einschränkenden Bedingung, aufstellen.

1. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n mit den Punktkoordinaten x^i sei $x^i=x^i(u^a)$ die Parameterdarstellung einer K-dimensionalen Fläche $\mathfrak{F}$ und

$$O=\int_{(K)} \mathfrak{L}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^a}\right) du^{\dot{1}} du^{\dot{2}} \dots du^{\dot{K}} \tag{1}$$

ein bei Parametertransformation invariantes, K-faches Integral über einen Bereich der Fläche $\mathfrak{F}$ erstreckt[2]. Dabei setzen wir voraus, dass n und K zwei relativ prime Zahlen sind. Der Wert des Integrals lässt sich als K-dimensionalen Flächeninhalt eines gegebenen Bereiches auffassen. Da der Wert des Integrals stets von dem betreffenden K-dimensionalen Flächenstück allein, aber nicht von der Wahl der Parameter u^a abhängig ist, soll das obige Integral bei der Koordinaten- und Parametertransformation ganz unverändert bleiben. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{L}}\left(\bar{x}^j, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{u}^\beta}\right)=\mathfrak{L}\left(x^k, \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\right)\left|\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\rho}\right| \tag{2}$$

identisch gilt. Somit ist die Grundfunktion $\mathfrak{L}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right)$ bei der Koordinatentransformation $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j)$ eine absolute Invariante und bei der Parametertransformation $\bar{u}^a=\bar{u}^a(u^\beta)$ eine Skalardichte vom Gewichte eins.

Da $x^i=x^i(u^{\dot{1}}, u^{\dot{2}}, \dots, u^{\dot{K}})$ eine reguläre Parameterdarstellung der Fläche $\mathfrak{F}$ sei, habe die daraus durch Differentiation erhaltene Matrix

1) A. Kawaguchi und S. Hokari, Die Grundlegung der Geometrie der metrischen fünf-dimensionalen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts, Proc. **16** (1940), 313–319.

2) In dieser Arbeit laufen die lateinischen Indizes stets von 1 bis n, griechischen von $\dot{1}$ bis $\dot{K}$ ($K<n$).