100. *Teilweise geordnete Algebra.*[1]

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1940.)

H. Freudenthal hat eine Spektraltheorie im teilweise geordneten Modul gebildet.[2] Unabhängig von Freudenthal, hat S. W. P. Steen die Spektraltheorie Hermitescher Operatoren im Hilbertschen Raum abstrakt behandelt, indem er teilweise geordnete Ringe definiert.[3] Wir wollen nun die beiden Theorien von Freudenthal und Steen in einer einzigen zusammenfassen, und zum komplexen Ring erweitern, welcher dem Abelschen Ring normaler Operatoren im Hilbertschen Raum entspricht. Neuerdings hat B. Vulich Relationen zwischen teilweise geordneten Moduln und Ringen betrachtet, indem er das Produkt zweier Elemente in teilweise geordneten Moduln definiert.[4] Die Resultate von Vulich werden auch in unserer Theorie umgefasst.

Diese Note besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil erörtern wir Projektionen und Spektraltheorie im teilweise geordneten Modul.

Unter teilweise geordneten Moduln verstehen wir wie Freudenthal:

Definition. Ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf dem Körper reeller Zahlen heisst ein *teilweise geordneter Modul*, wenn 1) für irgendzwei $a, b \in \mathfrak{M}$ man Ordnung derart findet, dass aus $a > b$ und $b > c$ ja $a > c$ folgt; 2) $a \not> a$ ist; 3) für je zwei a, b das Element $c = a \frown b$ existiert: $c \leqq a, \leqq b$ und für jedes $x \leqq a, \leqq b$ stets $x \leqq c$; und das $d = a \smile b$ existiert: $d \geqq a, \geqq b$ und für jedes $x \geqq a, \geqq b$ stets $x \geqq d$; 4) $a + c > b + c$ aus $a > b$, 5) $\alpha a > 0$ aus $a > 0$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ folgt, und 6) für jede absteigende Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, das $c = \lim_{\nu \to \infty} a_\nu$ existiert, so dass $c \leqq a_\nu$, und für jedes $x \leqq a_\nu$ stets $x \leqq c$ ist.

Hieraus kann man aber den allgemeinen Limesbegriff herleiten: Wenn für irgendeine Folge positiver Elemente $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu \to \infty} l_\nu = 0$,

$$|x_\nu - x_0| \leqq l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gilt, so bezeichnet man $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = x_0$. Diese Definition stimmt mit der von Steen, durch $\overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, x_\nu$, $\underline{\lim_{\nu \to \infty}}\, x_\nu$, überein, aber ist bequemer, um andere Konvergenzen zu definieren.

Wir wollen Projektionen im allgemeineren Gestalt als Freudenthal definieren. Zwei Elemente x, y heissen *zueinander orthogonal*, wenn

---

1) Ausführliches erscheint nächstens in Japanese Journal of Mathematics.

2) H. Freudenthal: Teilweise geordnete Modul. Proc. Akad. Amsterdam. 39, 1936, S. 641–651.

3) S. W. P. Steen: An Introduction to the Theory of Operators (I), Proc. London Math. Soc. (2) 41, 1936, S. 361–392.

4) B. Vulich: Une Définition du Produit dans les Espaces semi-ordonnés linéaires, Comp. Reind. URSS, No. 9, XXVI, 1940, S. 850–854.