

### 114. Über einen Satz von Herrn Löwner.

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1940.)

Wir bezeichnen mit  $B$  einen Bereich, welcher dadurch hervorgeht, daß man den Einheitskreis längs eines von der Peripherie ausgehenden Jordanbogens aufschneidet, der den Nullpunkt nicht enthält. Bereiche dieser Art nennen wir nach Herrn Löwner beschränkte Schlitzbereiche. Um die extremalen Eigenschaften der schlichten Funktionen  $w=f(z)$  im Innern des Einheitskreises  $|z|<1$  zu untersuchen, braucht man nach dem Carathéodoryschen Satze<sup>1)</sup> über Gebietskerne nur die beschränkten Schlitzabbildungen, d. h. die schlichten (normierten) Abbildungen des Einheitskreises auf beschränkte Schlitzbereiche, zu behandeln.

Herr Löwner<sup>2)</sup> hat den folgenden wichtigen Satz über solche Abbildungen bewiesen :

Zu jeder beschränkten Schlitzabbildung

$$f(z) = e^{-t_0} (z + \dots) \quad t_0 \geq 0$$

läßt sich eine stetige Funktion  $\kappa(t)$  mit  $0 \leq t \leq t_0$  und  $|\kappa(t)|=1$  so finden, daß man mit ihrer Hilfe diese Funktion als Integral  $f(z) = f(z, t_0)$  der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)}$$

mit der Anfangsbedingung  $f(z, 0) = z$  bestimmen kann.

In der vorliegenden Note soll ein kurzer Beweis dieses Satzes gegeben werden<sup>3)</sup>.

Es sei ein beliebiger beschränkter Schlitzbereich  $B$  mit dem vom Punkte  $w = e^{-i\theta_0}$  ausgehenden Schlitz  $L$  gegeben. Wir stellen die Gleichung für  $L$  durch seinen Längenparameter  $s$  dar :

$$L: \quad w = \omega(s), \quad 0 \leq s \leq s_0; \quad \omega(0) = e^{-i\theta_0}.$$

Wir bezeichnen nun mit  $l_s$  das Anfangsstück von  $L$ , das den Parameterwerten von 0 bis  $s$  entspricht, und mit  $G_s$  den beschränkten Schlitzbereich mit dem Schlitz  $l_s$ . Es sei.

$$w = g(w_s, s) = \gamma(s) (w_s + \dots), \quad \gamma(s) > 0,$$

diejenige Funktion, die die schlichte normierte Abbildung von  $G_s$  auf

1) C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann. **72** (1912), 107-144.

2) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Math. Ann. **89** (1923), 103-121.

3) Kürzlich hat Herr J. Basilewitsch einen sehr einfachen Beweis des Löwnerschen Satzes berichtet in seiner Abhandlung: Sur les théorèmes de Koebe-Bieberbach, Rec. math. **1** (43) (1936), 283-292. Aber es scheint mir nicht ganz richtig zu sein.