3. Sur les domaines pseudoconvexes.

Par Kiyosi OKA.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A, Jan. 13, 1941.)

Au commencement du progrès récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, *F. Hartogs* a découvert que tout *domaine d'holomorphie*[1] est un *domaine pseudoconvexe*. Ces 2 notions sont devenues extrêmement importantes d'après le développement de la théorie ; le problème réciproque reste cependant à peu près libre même aujourd'hui. Nous traiterons ce problème dans la présente Note ; où nous placerons pour la simplicité à l'espace de 2 variables complexes, mais la conclusion s'appliquera, je crois, à un nombre quelconque de variables.

1. Dans l'espace des 2 variables complexes x, y, considérons un domaine univalent et fini D. Nous l'appellerons *pseudoconvexe*, si l'ensemble complémentaire E de D satisfait au *théorème de la continuité* au voisinage d'un point fini quelconque P, et encore si ceci admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de P ; dont la première condition veut dire que : lorsque l'on trace une hypersphère suffisamment petite autour de P, et prend arbitrairement dans la hypersphère un point (a, b) et une circonférence de la forme, $x=a$, $|y-b|=r$, si (a, b) appartient à E, sans l'être pour aucun point de la circonférence, on peut trouver un nombre positif d de façon que, à tout x' dans $|x-a|<d$, corresponde dans $|y-b|<r$ au moins un y' tel que (x', y') appartienne à E. Alors :

Théorème. Dans l'espace de 2 variables complexes, tout domaine pseudoconvexe univalent et fini est un domaine d'holomorphie.

La démonstration sera donnée dans un Mémoire ultérieur. Dans ce qui suit, nous en exposerons tout rapidement la partie essentielle.

2. Nous allons construire un domaine pseudoconvexe Δ satisfaisant aux conditions un peu compliquées, à partir de 2 domaines d'holomorphie empiétant l'un sur l'autre. Considérons dans l'espace (x, y) un domaine *univalent et borné* D et 3 hyperplans de la forme $x_1=a$, $x_1=a_1$, $x_1=a_2$, que nous désignerons par L, L_1, L_2, respectivement, où x_1 représente la partie réelle de x et $a_2<a<a_1$. Supposons D traversé par chacun des hyperplans, et désignons les parties de D au côté gauche de L_1, au côté droit de L_2 et entre L_1 et L_2 par D_1, D_2 et D_3, respectivement. Supposons d'abord *que toute composante continue des ensembles D_1, D_2 soit un domaine d'holomorphie.* Ensuite, pour les fonctions holomorphes $X_j(x, y)$ $(j=1, 2, \dots, \nu)$ dans D_3:

1°. Supposons que l'ensemble des points de D_3 satisfaisant à $|X_j(x, y)|\leqq 1$ $(j=1, 2, \dots, \nu)$ n'ait pas de point au voisinage de l'intersection de la frontière de D avec L.

---

1) Un domaine est appelé domaine d'holomorphie, s'il l'est pour une au moins des fonctions.