17. *Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités trenscendantes indirectement critiques.*

Par Yosiro TUMURA.
Nippon Ikadaigaku Yoka.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1941.)

1. M. L. Ahlfors a démontré le théorème suivant[1]:

A. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, dont la fonction inverse possède n singularités trenscendantes directement critiques distinctes sur sa surface de Riemann. Alors, pour $n \geqq 2$, l'ordre est au moins $\frac{n}{2}$; pour $n=1$, il n'existe pas de chemin* B *surlequel $\frac{1}{f-\omega}$ est bornée, où ω est la coordonné de la singularité.*

M. G. Valiron a prouvé deux théorèmes suivants:

B[2]. 1° *Toute fonction méromorphe dont la fonction caractéristique $T(r,f)$ satisfait à la condition*

$$\lim \frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=0\,,$$

possède au plus une valeur asymptotique. 2° *Encore, il existe une suite de circonférences $|z|=r_n$ $(r_n\to\infty)$ sur lesquelles $f(z)$ tend uniformément vers une même limite.*

C[3]. *Soit $f(z)$ une algébroïde méromorphe à k branches dont la fonction caractéristique satisfait à la condition $T(r,f)=0\big((\log r)^2\big)$. Elle possède au plus k valeurs asymptotiques.*

En employant des familles normales, nous prouvons l'extension des théorèmes de M. Valiron, ensuite étudions la singularité indirectement critique.

2. Lemme 1. *Etant donnée une suite des nombres positifs $0<p_1\leqq p_2\leqq\cdots\leqq p_i\leqq\cdots (\lim p_i=\infty)$, désignons le nombre des $p_i\leqq r$ par $n(r)$,*

$$N(r)=\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \quad \text{et si} \quad \underline{\lim}\, \frac{N(r)}{(\log r)^2}\leqq h<+\infty \tag{1}$$

alors

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\, \frac{p_{i+1}}{p_i}\geqq e^{\frac{1}{2h}}>1\,. \tag{2}$$

Si pour tout $r>r_0$, $n(r)>2h'\log r$ $(h'=h+\varepsilon,\ \varepsilon>0$ arbitraire), on a par l'intégral partielle

1) L. Ahlfors, Über die asymptotischen Wert der meromorphnen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. 6, 1932. voir aussi Ullrich, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen, Jahresb. Deuts. Math., 46, 1936.

2) G. Valiron, Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes, Rendiconti Circolo mat. di Palermo 46, 1925.

3) G. Valiron, Sur le nombre des singularités trenscendantes des fonctions inverse d'une classe d'algebroïde. C. R. 200, 1935.